

PENGARUH PEMIKIRAN WITTGENSTEIN TERHADAP MATEMATIKA

Oleh: Hardi Suyitno¹

Abstract

Wittgenstein is a unique philosopher. He criticizes his own opinion. Philosophers divide his views in two periods that are early and later. The early of Wittgenstein's view set by *Tractatus Logico Philosophicus* and the later set by *Philosophical Investigations*. Wittgenstein's conceptions of mathematics fall in three periods, that are early, middle and later. The early period Wittgenstein's conception of mathematics set by *Tractatus Logico Philosophicus*, the middle period set by *Philosophical Grammar* dan *Philosophical Remarks*, and the later period set by *Remarks on the Foundations of Mathematics*. The Wittgenstein's view on mathematics is not belonging to logicism, formalism, or intuitionism. The later Wittgenstein on mathematics is that "Mathematics as a human invention". He maintains his rejection for infinitely in mathematics.

Keywords: mathematics, infinitely, logicism, formalism, intuitionism

A. Pendahuluan

Wittgenstein adalah filsuf terbesar abad 20 dan memiliki peran sentral dalam filsafat analitik (Matar, 2006) Banyak pemikir terpukau pada pemikirannya tentang analisis bahasa. Sejarah menunjukkan bahwa ia dianggap sebagai tokoh utama dari filsafat bahasa biasa. Ia terus mempengaruhi filsafat saat ini dalam topik logika dan bahasa, persepsi dan intensi, etika dan religi, estetika dan budaya (Matar, 2006). Pemikiran filsafat Wittgenstein yang dituangkan dalam *Tractatus Logico Philosophicus* memperlihatkan aplikasi logika modern ke metafisika, dan membahas logika simbolik, sifat dasar logika dan matematika.

Sebagian besar tulisan Wittgenstein yang ditulis dari tahun 1929 sampai 1944 dicurahkan kepada matematika dan pada tahun

¹ Dosen FMIPA Universitas Negeri Semarang

1944 Wittgenstein sendiri menekankan bahwa “sumbangan utamanya adalah pada matematika” (Monk, 1990: 466).

Pemikiran filsafat Wittgenstein dapat dibagi atas dua periode, yaitu periode I *Tractatus Logico Philosophicus*, dan pemikirannya periode II dituangkan dalam karyanya yang berjudul *Philosophical Investigations* (Bertens, 2002: 43). Dua periode pemikiran filsafat Wittgenstein itu sering disebut pemikiran awal dan pemikiran akhir atau Wittgenstein I dan Wittgenstein II. Pemikiran awal Wittgenstein memperlihatkan aplikasi dari logika modern ke metafisika, melalui bahasa, ia memberi pemikiran atau wawasan baru tentang hubungan antara dunia, pikiran dan bahasa dan oleh karenanya juga tentang hakikat filsafat (Matar, 2006). *Philosophical Investigations* mengkritik semua filsafat tradisional, termasuk karya Wittgenstein yang awal (Matar, 2006)). Inilah salah satu keganjilan atau keunikan perjalanan pemikiran filsafat Wittgenstein yang sangat berbeda dengan para pemikir lain. Ia mengkritik karyanya sendiri dalam *Tractatus Logico Philosophicus* melalui *Philosophic Investigations*. Ia sebagai kreator dari dua pemikiran yang berbeda, orisinal, mempunyai pengaruh filsafat yang kuat, filsafat yang akhir adalah hasil dari kritik yang dihasilkan oleh dirinya sendiri melawan pemikirannya sendiri yang awal (Munitz, 1981: 269-287). Sluga dan Stern (1996: 1) menyebutkan Wittgenstein sebagai filsuf yang unik, radikal dan fundamental. Pemikiran Wittgenstein tentang matematika juga mengalami perkembangan yang disebabkan oleh interaksinya dengan para pemikir filsafat matematika seperti Frege, Russell, Hilbert, Brouwer, Ramsey, Waismann, dsb. Perkembangan pemikiran Wittgenstein dalam bidang matematika sangat penting untuk dikaji karena ia banyak memberikan kritik kepada aliran filsafat matematika terutama logisisme, formalisme dan intuitionisme. Pemikiran Wittgenstein juga berpengaruh terhadap perkembangan filsafat matematika yang dikembangkan oleh Ernest. Pemikiran filsafat matematika yang dibangun oleh Ernest menjadi dasar pengembangan filsafat pendidikan matematika.

B. Riwayat Hidup Wittgenstein dan Karyanya

1. Riwayat hidup

Ludwig Josef Johann Wittgenstein lahir di Wina pada tanggal 26 April 1889 dan merupakan anak terakhir dari delapan

bersaudara, empat laki-laki dan tiga perempuan, yang semuanya berbakat musik (Collinson, 2001: 214). Wittgenstein anak dari Karl Wittgenstein. Ia berasal dari keluarga Yahudi yang memeluk agama Kristen Protestan dan ibunya beragama Katolik, sedangkan Wittgenstein dibaptis di gereja Katolik dan di akhir hayatnya dikuburkan secara Katholik (Richter, 2006). Ayahnya adalah seorang pemimpin industri baja besar yang mempunyai bakat musik dan bertempat tinggal di rumah yang menjadi semacam pusat musik di Wina (Bertens, 2002: 39).

Pada tahun 1903 Wittgenstein mulai menjadi siswa di sekolah Linz, kemudian menjadi mahasiswa di *Technical University of Berlin* dalam bidang mesin pesawat terbang, dan sejak 1908 menjadi mahasiswa di *University of Manchester* Inggris untuk melakukan riset penerbangan (Richter, 2006). Setelah mengikuti kuliah dari ahli matematika Gottlob Frege, Wittgenstein tertarik pada filsafat matematika dan logika (Mudhofir, 2001: 542). Ketertarikan atas filsafat didorong juga oleh ahli matematika Brouwer. Frege memberi rekomendasi kepada Wittgenstein untuk belajar kepada Russell (Richter, 2006). Pada tahun 1912 Wittgenstein belajar kepada Russell di Trinity College, Cambridge; dan pada rentang waktu antara tahun 1929-1932, Wittgenstein semakin tekun mempelajari filsafat matematika dan ekonomi di samping logika dan filsafat psikologi (Collinson, 2001: 214-215).

Ketika pecah perang Perang Dunia, Wittgenstein bertugas pada ketentaraan Austria dan beberapa kali mendapat tanda jasa, serta dipenjara di Tyrol oleh tentara Italia (Richter, 2006). Setelah bebas dari penjara ia ke Wina dan menyerahkan harta warisan ayahnya dan dilatih untuk menjadi guru. Ia merasa gagal menjadi guru dan berhenti pada tahun 1926. Ia berkenalan dengan Moritz Schlick seorang professor filsafat di Universitas Wina dan beberapa profesor yang lain dan juga beberapa ahli matematika. Wittgenstein kembali ke Cambridge sebagai mahasiswa riset dengan tulisannya terdahulu *Tractacus Logico Philosophicus* sebagai tesis doktornya. *Tractacus Logico Philosophicus* adalah pemikiran Wittgenstein tentang logika dan diterbitkan atas bantuan Russell pada tahun 1922. Bertrand Russell dan G.E. Moore menjadi penguji tesisnya.

Pada tahun 1929 Wittgenstein kembali ke Cambridge mengajar di Trinity College dan melakukan banyak kerja di bidang

filsafat (Richter, 2006). Pada tahun 1935 ia berkunjung ke Uni Soviet dan Norwegia dan ia tinggal pada sebuah gubuk yang dibangunnya pada kunjungan pertama. Di gubuk itulah ia menyusun *Philosophical Investigations*. Pada tahun 1939 ia diangkat sebagai professor filsafat di Cambridge menggantikan G.E. Moore (Collinson, 2001: 215). Pada tahun 1947 Wittgenstein mengundurkan diri dari jabatan professor dan berkonsentrasi untuk menulis *Philosophical Investigations* (Richter, 2006). Wittgenstein pernah tinggal sebentar di Irlandia dan di Amerika dan pada tahun 1949 ia kembali ke Inggris dan mulai menderita penyakit kanker. Pada tanggal 29 April 1951, Wittgenstein meninggal dunia di Cambridge (Collinson, 2001: 216).

2. Karya Wittgenstein

Karya Wittgenstein yang utama adalah *Tractatus Logico-Philosophicus*, *Philosophical Investigations*, dan *Remarks on The Foundation of Mathematics*. *Tractatus Logico-Philosophicus* pertama kali dipublikasikan dalam bahasa Jerman pada 1921, kemudian diterjemahkan oleh C.K. Ogden dengan bantuan F. P. Ramsey's dan diterbitkan dalam bahasa Inggris pada 1922 (Matar, 2006). *Tractatus Logico-Philosophicus* didasarkan atas gagasan bahwa masalah filsafat muncul dari kesalahpahaman logika bahasa dan buku itu menguraikan apa logika bahasa itu (Biletzki and Matar, 2006). *Tractatus Logico-Philosophicus* merupakan serangkaian proposisi logis tentang logika dan dunia. *Remarks on The Foundation of Mathematics* terdiri atas 7 bagian. Secara keseluruhan buku ini ditulis pada periode September 1937-April 1944. Kebanyakan menggambarkan konsep logika atau konsep logis dengan membedakan antara tingkah laku yang dapat diprediksi, konsep empirik, dan aturan-ditaati (*rule-following*). *Philosophical Investigations* dipublikasikan pada tahun 1953 dibagi atas dua bagian, yaitu Bagian I dan bagian II. Bagian I diselesaikan secara lengkap pada tahun 1945 dan Bagian II ditulis antara tahun 1947 dan 1949 (Wittgenstein, 1953: vi). Secara prinsip *Philosophical Investigations* memberi inspirasi filsafat bahasa biasa. *Philosophical Investigations* adalah karya yang juga memberikan perhatian pada logika dan bahasa tetapi penyajiannya tidak terlalu teknis seperti dalam *Tractatus Logico-Philosophicus*. Salah satu hal yang mendapat perhatian besar Wittgenstein dalam

Philosophical Investigations dan dibahas juga secara mendalam dalam *Remarks on The Foundation of Mathematics* adalah tentang *rule-following*. Karya Wittgenstein yang lain, misalnya *Culture and Value*, *Big Typescript*, *Lecture and Conversation*, *Lecture on the Foundation of Mathematics*, *Last Writings on the Philosophy of Psychology*, vol. I., *Last writings on the philosophy of Psychology*, vol. II., *Wittgenstein's Lecture Cambridge 1930 – 1932*, ed. D. Lee., *Notebooks 1914 –1916*, *Notes on Logic, on Certainty, Philosophical, Grammar, Philosophical Occasions*, 1912 –1951, *Philosophical Remark, Prototractatus, Remark and Color, Remark on the Foundation of Mathematics, Remark on the Philosophy of Psychology*, vol. I. *Remark on the Philosophy of Psychology*, vol. II. *Zettel* (Kaelan, 2003: 50). Karya Wittgenstein pada tahun terakhir diterbitkan dengan judul *On Certainty* dan kalimat terakhirnya adalah "Tell them I've had a wonderful life. (Richter, 2006). Kehidupan Wittgenstein didominasi oleh obsesi moral dan kesempurnaan secara filsafat (Monk, 1990)

C. Pemikiran dalam *Tractatus Logico-Philosophicus*

Tractatus Logico-Philosophicus disusun oleh Wittgenstein berakhir pada tahun 1922. Konsepsi utama tentang matematika banyak dibangun oleh Wittgenstein dalam *Tractatus Logico-Philosophicus*. Tujuan utama kerja Wittgenstein dalam karya ini adalah menjelaskan hubungan bahasa dengan realitas, dengan menentukan apa yang diperlukan oleh bahasa atau manfaat bahasa berkaitan dengan dunia. Pesan yang terkandung di dalam *Tractatus Logico-Philosophicus* adalah terdapat hubungan yang pasti atau tepat antara bahasa, logika dan dunia; bahasa dan logika selalu bersama-sama di dalam sesuatu yang dapat dikatakan (Hers, 1997: 201). Setiap pembicaraan tentang dunia selalu diperlukan logika dan bahasa. Menurut Wittgenstein, satu proposisi menunjukkan gagasan (*sense*) (Wittgenstein, 1951: 67; TLP 4.022), proposisi elementer yang dapat digunakan untuk menjelaskan realitas adalah proposisi yang bersifat empiris. Proposisi elementer adalah benar jika sesuai dengan realitas dan salah jika tidak sesuai dengan realitas (Wittgenstein, 1951: 91; TLP 4.25). Semua proposisi menggunakan kata "benar" diturunkan secara nyata dengan korespondensi atau kesesuaian yang tergantung pada hubungannya dengan realitas. Wittgenstein berpendapat bahwa proposisi matematika adalah bukan proposisi

yang nyata dan kebenaran matematika hakikatnya adalah murni bersifat sintaktis tanpa merujuk pada realitas. Wittgenstein berpendapat bahwa perhitungan matematika diciptakan atau dibuat dan matematika diperluas dengan perhitungan dan bukti. Satu teorema dapat diturunkan dari aksioma-aksioma dengan alat aturan tertentu dengan cara khusus.

Pemikiran Wittgenstein tentang matematika dalam *Tractatus Logico-Philosophicus* disebut *formal operations*. Ia secara singkat menyajikan pemikirannya sebagai berikut:

- a. ... tanda atau simbol ' $[a, x, O'x]$ ' adalah suku sebarang dari satu barisan dengan bentuk $a, O'a, O'O'a, \dots$ (Wittgenstein, 1951: 117; TLP 5.2522)
- b. ... bentuk umum satu operasi $\Omega'(\eta)$ adalah $[\xi, N(\xi)]'(\eta)=[\eta, \xi, N(\xi)]$ (Wittgenstein, 1951: 154; TLP 6.01)
- c. ... bentuk umum dari satu proposisi (fungsi kebenaran) adalah $[p, \xi, N(\xi)]$ (Wittgenstein, 1951: 154; TLP 6)
- d. Bentuk umum bilangan cacah adalah $[0, \xi, \xi + 1]$ (Wittgenstein, 1951: 155; TLP 6.03)
- e. Konsep bilangan adalah hanya apa yang berada bersama-sama atau berserikat pada semua bilangan. Konsep kesamaan yang bersifat numerik adalah bentuk umum dari semua kasus khusus dari kesamaan yang bersifat numerik. (Wittgenstein, 1951: 155; TLP 6.022).

Berdasarkan pendapat Wittgenstein tersebut di atas, bentuk umum satu proposisi adalah satu kasus khusus dari bentuk umum satu operasi. Bentuk umum bilangan asli adalah kasus khusus dari bentuk umum proposisi. Bentuk umum dari operasi, proposisi, dan bilangan asli adalah model pada tanda atau simbol ' $[a, x, O'x]$ '. Pada notasi tersebut a merupakan suku pertama dari deret, x mewakili sebarang suku dari deret, dan $O'x$ merupakan suku berikutnya tepat sesudah x . Berdasarkan ketentuan di atas bilangan asli dapat dibangun atau dibentuk dengan melakukan iterasi secara berulang terhadap bentuk umum bilangan cacah, yaitu $[0, \xi, \xi + 1]$. Proposisi dapat dibangun dari bentuk umum proposisi $[p, \xi, N(\xi)]$ dengan memilih satu proposisi elementer p yang juga mewakili seluruh nilai kebenarannya.

Wittgenstein membuktikan proposisi $2 \times 2 = 4$ dengan cara sebagai berikut,

$$(\Omega^v)^{u'}x = \Omega^{vx} u'x \text{ Def.,}$$

$$\Omega^{2 \times 2'}x = (\Omega^2)^{2'}x = (\Omega^2)^{1+1'}x = \Omega^{2'}\Omega^{2'}x = \Omega^{1+1'}\Omega^{1+1'}x =$$

$$(\Omega\Omega')^{1'}(\Omega'\Omega')x = \Omega^{1'}\Omega^{1'}\Omega^{1'}\Omega^{1'}x = \Omega^{1+1+1+1'}x = \Omega^{4'}x.$$

(Wittgenstein, 1951: 173; TLP 6.241)

Menurut Frascolla's (1994: 3), satu identitas yang bersifat numerik “t=s” adalah satu teorema matematika jika dan hanya jika terdapat persamaan $\Omega^t x = \Omega^s x$ yang dibingkai dalam bahasa teori umum dari operasi logis. Wittgenstein membuktikan persamaan $\Omega^{2 \times 2'}x = \Omega^{4'}x$ yang diterjemahkan kedalam kesamaan aritmetika $2 \times 2 = 4$ dalam bahasa yang operasional. Pembuktian ini menunjukkan bahwa Wittgenstein menerjemahkan aritmetika bilangan ke satu jenis teori umum untuk operasi.

Russell mengatakan bahwa “Wittgenstein's ‘theory of number’ stands in need of greater technical development, primarily because Wittgenstein had not shown how it could deal with transfinite numbers“ (Wittgenstein, 1951: xx). Masalah ketakterhinggaan adalah satu masalah dalam pemikiran matematika Wittgenstein. Menurut Wittgenstein, konsep ketakterhinggaan dapat dipahami melalui proses belajar anak dengan mengikuti satu aturan “n diikuti oleh n+1”. Sebagian ahli menganggap bahwa Wittgenstein menolak konsep ketakterhinggaan. Anggapan ini berdasarkan atas pendapat Wittgenstein yang menyatakan bahwa konsep ketakterhingga dan himpunan takberhingga berbahaya (Wittgenstein, 1978: 131; RFM II 19). Sebagian ahli menganggap bahwa Wittgenstein hanya menolak penggunaan kata “takterhingga” untuk memberi makna kepada sesuatu yang tidak ada, tetapi tidak secara total menolak konsep ketakterhinggaan dalam matematika.

Wittgenstein menyatakan dalam *Tractatus Logico-Philosophicus* bahwa “mathematics is a method of logic” (Wittgenstein, 1951: 171; TLP 6.234). Pernyataan ini bermakna bahwa karena bentuk umum bilangan cacah dan bentuk umum proposisi keduanya adalah sebagai contoh dari bentuk umum secara formal dari operasi, hanya seperti proposisi fungsi kebenaran yang dapat dikonstruksi dengan menggunakan bentuk umum proposisi, persamaan matematika dapat dikonstruksi dengan menggunakan bentuk umum dari bilangan cacah. Secara singkat Wittgenstein berpendapat bahwa penarikan kesimpulan dalam matematika disusun atau diproses berdasarkan penarikan kesimpulan dalam logika dan penalaran matematika adalah

penalaran logika sehingga matematika adalah satu metode dari logika.

Wittgenstein menyatakan bahwa *“the logic of the world which is shown in tautologies by the propositions of logic, is shown in equations by mathematics”* (Wittgenstein, 1951: 169; TLP 6.22).” Pernyataan ini mengandung makna bahwa karena matematika adalah dikreasi oleh matematikawan untuk membantu manusia menghitung dan mengukur, sepanjang seperti kita membolehkan memungkinkan orang untuk berpendapat atau berkesimpulan bahwa satu proposisi kontingen dari proposisi kontingen. Wittgenstein menegaskan dengan kalimat *“... we make use of mathematical propositions only in inferences from propositions that do not belong to mathematics to others that likewise do not belong to mathematics”* (Wittgenstein, 1951: 169; TLP 6.211. Wittgenstein menggunakan proposisi logis dan persamaan matematika untuk mencerminkan fakta dan logika dunia. Manusia memiliki kapasitas mengkonstruksi bahasa sehingga setiap pikiran dapat diekspresikan. Bahasa percakapan sehari-hari adalah satu bagian dari organisme manusia. Logika melekat dalam bahasa sehari-hari. Wittgenstein menegaskan bahwa,

Man possesses the ability to construct languages capable of expressing every sense, without having any idea how each word has meaning or what its meaning is--just as people speak without knowing how the individual sounds are produced. Everyday language is a part of the human organism and is no less complicated than it. It is not humanly possible to gather immediately from it what the logic of language is (Wittgenstein, 1951: 61-62; TLP 4.002).

Kerancuan atau kesalahpahaman para filsuf disebabkan oleh kegagalan dalam memahai logika bahasa. *Most of the propositions and questions of philosophers arise from our failure to understand the logic of our language* (Wittgenstein, 1951: 62; TLP 4.003). Satu penarikan kesimpulan secara logis yang sah mengandung hubungan antara fakta yang mungkin dan satu penarikan kesimpulan secara logis yang kuat mengandung hubungan antara fakta yang ada.

Menurut Wittgenstein, kebenaran proposisi matematika dan proposisi logika diketahui dengan pasti hanya dengan melihat simbol tanpa memerlukan observasi terhadap fakta dunia.

Kebenaran dua jenis proposisi tersebut diketahui semata-mata dengan operasi formal secara murni. Karena kebenaran tautologi dan persamaan matematika diketahui dengan pasti tanpa dibandingkan dengan keadaan atau fakta, maka kebenaran tautologi dan persamaan matematika dapat disamakan dengan proposisi logika dan proposisi matematika. Akibat dari pemikiran tersebut adalah orang dapat secara tepat mendeskripsikan bahwa filsafat aritmetika dalam *Tractatus* merupakan satu jenis dari logisisme. Frascolla (1994: 37) mengakui bahwa logisisme Wittgenstein berbeda dengan logisisme Russell dan Frege. Perbedaannya adalah Wittgenstein tidak mendefinisikan bilangan secara logis sebagaimana Russell dan Frege mendefinisikannya. Analogi antara tautologi dan kebenaran persamaan matematika adalah bukan satu identitas dan juga bukan satu relasi dari reduksibilitas (*reducibility*). Wittgenstein mendefinisikan bilangan asli sebagai eksponen operasi (*exponents of operations*) (Wittgenstein, 1951: 155; TLP 6.03). Interpretasi numeral sebagai eksponen dari satu operasi variabel merupakan satu reduksi dari aritmetika ke teori operasi yang dengan itu operasi dikonstruksi sebagai satu operasi logika. Wittgenstein mengatakan bahwa, *“Logical operations are performed with propositions, arithmetical ones with numbers,”* (Waismann, 1979: WVC 218), selanjutnya ia mengatakan bahwa *“the result of a logical operation is a proposition, the result of an arithmetical one is a number”*. Gagasan bilangan asli sebagai eksponen operasi merupakan satu gagasan yang sangat formal dan merupakan operasi yang bersifat sintaksis (Rodych, 1995). Sayangnya, Wittgenstein tidak menyusun definisi bilangan sebagai eksponen operasi dalam satu definisi formal. Pendapat Wittgenstein bahwa bilangan sebagai eksponen operasi merupakan tantangan bagi matematikawan, terutama yang sependapat dengan Wittgenstein untuk menyusun satu sistem aksiomatika dengan menetapkan definisi secara formal bahwa bilangan sebagai eksponen operasi.

Wittgenstein (1951: 169; TLP 6.211) menyatakan *“In real life a mathematical proposition is never what we want. Rather, we make use of mathematical propositions only in inferences from propositions that do not belong to mathematics to others that likewise do not belong to mathematics”*. Dalam kehidupan nyata satu proposisi matematika tidak pernah diperlukan, penggunaan proposisi matematika hanya dalam penarikan kesimpulan dari

proposisi yang tidak termasuk ke dalam matematika ke yang lain yang juga tidak termasuk ke dalam matematika. Pendapat Wittgenstein ini seperti menggambarkan penerapan matematika untuk menyelesaikan masalah di dunia nyata. Matematika terapan dihadapkan dengan masalah yang real dan mengharapkan pemecahan yang dapat menjawab masalah tersebut. Proses untuk memecahkan masalah tersebut sebenarnya menggunakan proposisi matematika, yaitu pada saat proses pengerjaan di dalam model matematika. Contoh, seorang pedagang ayam pergi ke pasar dengan membawa sejumlah uang tanpa dihitung terlebih dahulu untuk membeli beberapa ekor ayam. Ia membeli sepuluh ekor ayam dengan harga Rp 25.000,- per ekor. Keperluan lain menghabiskan Rp 50.000,-. Sampai di rumah ia masih memiliki sisa uang Rp 250.000,-. Pedagang tersebut dapat menghitung banyaknya uang yang dibawa dari rumah sebesar Rp 550.000,- walaupun tanpa menggunakan proposisi matematika. Masalah tersebut dapat diungkapkan dengan menggunakan bahasa matematika. Masalah dalam bentuk model matematika adalah menentukan nilai x dengan syarat " $x - 10 \times 25000 - 50000 = 250000$ ". Proses matematika untuk memecahkan masalah tersebut adalah

$$\begin{aligned} x - 10 \times 25000 - 50000 &= 250000 \Leftrightarrow \\ x - 300000 &= 250000 \Leftrightarrow \\ x &= 250000 + 300000 \Leftrightarrow \\ x &= 550000. \end{aligned}$$

Interpretasinya adalah pedagang pergi ke pasar dengan membawa uang sejumlah Rp 550000,-

Tentang teori himpunan Wittgenstein menyatakan bahwa "*The theory of classes is completely superfluous in mathematics. This is connected with the fact that the generality required in mathematics is not accidental generality*" (Wittgenstein, 1951: TLP 6.031. Pendapat ini merupakan kritik yang halus terhadap teori himpunan dan sekaligus terhadap logisisme. Ia berpendapat bahwa generalitas dalam matematika bukan generalitas yang kebetulan, tetapi generalitas yang diatur oleh manusia dengan cara mendeskripsikan sehingga satu unsur atau objek dapat menggantikan atau mewakili yang lain (Waismann, 1979: WVC 102). Fakta menunjukkan bahwa tidak semua himpunan dapat dinyatakan dengan cara menentukan syarat keanggotaan dan menggunakan simbol. Satu himpunan yang anggotanya adalah

semua objek yang diucapkan oleh seribu orang yang sedang mabuk tidak dapat disajikan dengan cara menyatakan syarat keanggotaannya, keanggotaan himpunan tidak dapat digeneralisasi. Satu-satunya cara adalah dengan menyebutkan semua anggota himpunan tersebut.

Awalnya matematika dan kegiatan matematika adalah bersifat formal murni dan sintaksis. Wittgenstein tanpa penjelasan membedakan antara permainan yang murni formal dengan tanda-tanda, yang tidak memiliki penerapan dalam proposisi kontingen. Ia juga membedakan permainan yang murni formal dengan proposisi matematika yang digunakan untuk menyusun penarikan kesimpulan dari proposisi kontingen ke proposisi kontingen. Ia juga tidak secara eksplisit mengatakan bagaimana persamaan dalam matematika digunakan dalam penarikan kesimpulan dari proposisi ke proposisi yang lain (Floyd, 2002: 309; Kremer, 2002: 293-94). Menurut Wittgenstein persamaan matematika adalah bukan proposisi sebenarnya. Persamaan matematika merupakan satu kalimat yang belum dapat ditentukan nilai kebenarannya. Secara prinsip pemikiran matematika Wittgenstein dalam *Tractatus* dipengaruhi oleh Russell dan Frege.

D. Pemikiran dalam *Philosophical Remarks* dan *Philosophical Grammar*

Setelah menjalani masa kekosongan dalam berpikir filsafat, pada tanggal 10 Maret 1928, Wittgenstein mengikuti satu pertemuan di Wina. Dalam pertemuan itu, Brouwer mempresentasikan makalah yang berjudul "*Science, Mathematics, and Language*". Wittgenstein kembali menekuni filsafat matematika diduga atas pengaruh presentasi Brouwer dan juga pembicaraannya dengan Ramsey dan para anggota Lingkaran Wina (Biletzki and Matar, 2006). Wittgenstein banyak berdiskusi dengan Brouwer dan juga membaca karya Weyl, Skolem, Ramsey dan Hilbert (Finch, 1977: 260). Pertemuan dengan beberapa anggota Lingkaran Wina mendorong Wittgenstein berpikir ulang tentang pemikirannya yang telah dituangkan dalam *Tractatus* dan selanjutnya mempengaruhi arah pemikiran filsafatnya. Pada tahun 1929 Wittgenstein mulai menyusun karya baru yang berjudul *Philosophical Remarks* dan dilanjutkan dengan *Philosophical Grammar* (*Stanford Wittgenstein.mathematics*).

Philosophical Remarks disusun antara tahun 1929-1930 dan *Philosophical Grammar* disusun antara tahun 1931-1933, keduanya disajikan dengan gaya argumentatif. Wittgenstein sangat banyak menggunakan ide Brouwer dan ia menyukai ide tentang intuisi pada setiap langkah atau urutan bilangan mengikuti aturan.

Wittgenstein menyatakan dalam *Philosophical Remarks* bahwa “*we make mathematics*” (Wittgenstein, 1975: PR 159; Waismann, 1979: 34, Ft. #1). Selanjutnya Wittgenstein menjelaskan bahwa menciptakan matematika dengan penciptaan perhitungan yang bersifat matematik secara seformal mungkin dengan menetapkan aksioma-aksioma (Wittgenstein, 1975: PR §202). Matematika yang formal juga harus berdasarkan atas aturan sintaksis transformasi dan prosedur pengambilan keputusan yang berguna untuk menetapkan kebenaran dan kesalahan matematika secara algoritmik yang berupa proposisi matematika (Wittgenstein, 1975: PR 122, 162). Pendapat Wittgenstein tersebut bermakna bahwa inti atau hakikat matematika itu bersifat sintaksis, bebas dari aspek makna dan rujukan lain. Kebenaran proposisi matematika semata-mata berdasarkan susunan kata. Tanda atau simbol dalam perhitungan matematika juga tidak merujuk apa pun. Berkenaan dengan bilangan, Wittgenstein menyatakan bahwa “*numbers are not represented by proxies; numbers are there.*” (Waismann, 1979: WVC 34, Ft. #1) yang berarti bahwa bilangan itu ada pada penggunaannya, tidak diwakili oleh apa pun dan angka adalah bilangan bukan wakil dari bilangan.

Aritmetika adalah cabang matematika yang sering disebut seni berhitung dengan bilangan real positif dan mempelajari hubungan antar bilangan serta praktek perhitungan dengan bilangan. Menurut Wittgenstein, “*arithmetic doesn't talk about numbers, it works with numbers*” (Wittgenstein, 1975: PR 109). Pendapat Wittgenstein memiliki makna bahwa aritmetika bekerja dengan bilangan tetapi tidak membahas tentang hakikat bilangan. Apabila disediakan sebanyak sepuluh buah lidi, maka aritmetika tidak membicarakan lidi-lidi itu tetapi aritmetika bekerja dengan lidi-lidi itu. Kerja aritmetika dengan lidi-lidi itu misalnya menggabungkan dua ikat lidi dengan ikatan pertama terdiri atas lima lidi dan ikatan yang kedua terdiri atas 3 lidi. Aritmetika tidak mempermasalahkan hakikat “satu”, “dua”, “tiga”, dsb, tetapi

aritmetika melakukan tindakan atau melakukan pengerjaan terhadap unsur-unsur tersebut.

Menurut Wittgenstein, aritmetika adalah menghitung di atas kertas (Wittgenstein, 1975: *PR* 109, *PR* 111). Pemikiran Wittgenstein tentang matematika mirip dengan pemikirannya tentang bilangan. Ia mengatakan bahwa “*mathematics is always a machine, a calculus*” and “*a calculus is an abacus, a calculator, a calculating machine,*” which “*works by means of strokes, numerals, etc.*” (Waismann, 1979: *WVC* 106). Tentang simbol matematika, Wittgenstein mengatakan bahwa simbol matematika adalah tak bermakna dan tidak mewakili sesuatu berkaitan dengan maknanya. Berdasarkan pendapat Wittgenstein ini, orang dapat memahami makna dari $P=n!/k(n-k)$ hanya dengan memperhatikan simbolnya. Dalam praktek matematika, orang membuktikan satu teorema atau membuktikan benar salahnya satu proposisi semata-mata bekerja secara formal dengan aturan yang bersifat sintaksis. Pada waktu orang membuktikan satu teorema, dalam benaknya orang tidak pernah berpikir apa sebenarnya hakikat simbol atau proposisi yang terlibat. Makna “ $a\#b$ ” dalam aljabar abstrak tidak dapat ditangkap apabila tidak diketahui sistem yang berkaitan dengan simbol tersebut. Makna “ $a\#b$ ” dapat dipahami setelah diketahui bahwa simbol tersebut terkait dengan satu sistem aljabar tertentu. Fraleigh (1974: 14) menyajikan definisi satu sistem aljabar sebagai berikut,

Satu grup $(G, \#)$ adalah satu himpunan G yang tidak kosong yang dilengkapi dengan satu operasi biner “ $\#$ ”, sedemikian sehingga aksioma berikut dipenuhi

- $G1$. Operasi biner $\#$ bersifat asosiatif.
- $G2$. Ada elemen e dalam G sedemikian sehingga $e\#x=x\#e$ untuk semua $x \in G$. Elemen e adalah satu elemen identitas bagi $\#$ dalam G .
- $G3$. Untuk setiap a dalam G , ada satu elemen a' dalam G dengan sifat bahwa $a\#a'=a'\#a$. Elemen a' adalah invers dari a terhadap operasi $\#$

Makna “ $a\#b$ ” akan berbeda maknanya dengan makna “ $a\#b$ ” yang dikaitkan dengan sistem yang lain. Makna dari satu proposisi matematika yang memiliki makna dalam sistem secara utuh ditentukan oleh hubungan yang bersifat sintaktis dengan proposisi yang lain dalam satu sistem. Simbol matematika yang

tidak berada dalam konteks satu sistem matematika tertentu tidak dapat diketahui maknanya.

Aspek penting pemikiran Wittgenstein terhadap matematika adalah pandangannya bahwa penerapan matematika bukan merupakan syarat perlu dari kalkulus matematika. Ia mengatakan bahwa “*we can develop arithmetic completely autonomously and its application takes care of itself since wherever it's applicable we may also apply it*” (Wittgenstein, 1975: *PR* 109; Wittgenstein, 1974: *PG* 308; Waismann, 1979: *WVC* 104). Berdasarkan pendapat Wittgenstein ini, orang dapat menciptakan atau mengonstruksi satu jenis aritmetika tertentu tanpa harus memikirkan penerapannya. Orang dapat mengembangkan aritmetika dengan modulo bilangan yang sangat besar walaupun tidak atau belum diketahui penerapannya. Secara singkat dapat dikatakan bahwa aritmetika tidak memerlukan penerapan. Satu sistem matematika juga dapat dikembangkan tanpa memperhatikan kegunaannya. Sejarah matematika menunjukkan beberapa topik matematika seperti aljabar Boole pada awalnya dikembangkan tanpa memperhatikan kegunaannya. Pendapat Wittgenstein ini sesuai dengan pandangan yang mengatakan bahwa matematika adalah ratu dari ilmu.

Wittgenstein berpendapat bahwa matematika adalah ciptaan atau kreasi manusia. Keberadaan objek matematika tidak bebas dari penemuan manusia, semua dikreasi oleh manusia. Secara mendasar matematika adalah hasil kegiatan manusia. Berhitung secara matematik memuat secara terpisah unsur-unsur seperti aturan penarikan kesimpulan dan transformasi, bilangan irrasional sebagai aturan dan unsur seperti simbol, proposisi, aksioma, barisan terhingga. Unsur pada kelompok pertama oleh Wittgenstein disebut “*mathematical extension*” dan unsur pada kelompok yang kedua disebut “*mathematical intension*”. Berhitung dan unsur-unsurnya itu merupakan keseluruhan matematika. (Rodych, 2007). Konsekuensi dari pandangan tersebut adalah penolakan atas unsur *mathematical extension* tak berhingga. Menurut Wittgenstein, adanya ekstensi matematika yang tak berhingga merupakan kekeliruan berpikir. Pendapat Wittgenstein tersebut didukung oleh penalaran bahwa jika orang menguji apa yang diciptakan, maka ia akan melihat bahwa ia telah menciptakan berhitung formal yang memuat ekstensi takterhingga dan aturan intensional. Jika ia berusaha keras untuk menentukan mengapa

orang percaya bahwa ekstensional matematika tak terhingga ada, yang berarti bahwa secara sungguh-sungguh ketakberhinggaan masuk berada dalam matematika, maka ia menjumpai terjadinya pertentangan antara intensi dan ekstensi matematika. Penjelasan Wittgenstein dapat diberi ilustrasi dengan adanya orang mengonstruksi barisan bilangan yang tak terhingga yaitu 2, 4, 6, 8,... dengan mengatakan bahwa “suku-suku barisan ditentukan dengan menambah dua dari suku sebelumnya dan dilanjutkan secara terus-menerus sampai tak berhingga”. Jika ia menguji apa yang diciptakan, maka ia menjumpai “ketakterhinggaan”. Masalah yang muncul adalah suku-suku di tak terhingga dan menentukan simbol dari suku yang berada di tak terhingga. Simbol ∞ tidak dapat memperlihatkan hakikat dari suku yang diwakili. Kata “sampai tak terhingga” menimbulkan kontradiksi dengan kelanjutan suku berikutnya dengan menambah dua dari yang disebut di tak berhingga. Berkaitan erat dengan pertentangan antara intensional dan ekstensional adalah adanya fakta bahwa ada yang menganggap kata “tak terhingga” adalah “kata bilangan”. Anggapan seperti itu muncul karena menjawab pertanyaan tentang banyaknya suku barisan dari barisan seperti 2, 4, 6, 8,... Jawaban untuk pertanyaan “berapa” menunjuk pada satu bilangan. Akibatnya kata “tak terhingga” dipahami sebagai satu bilangan. Kata “tak terhingga” tidak menunjuk pada kuantitas. Kata-kata “tak terhingga” dan “terhingga” tidak berfungsi sebagai kata sifat atau bukan dari kelompok kata sifat. Dalam bahasa, kata “lima”, “satu”, dsb berbeda kelompok dengan kata “tak terhingga” dan “terhingga”. Wittgenstein mengatakan bahwa konsep “tak terhingga” dipahami secara benar sepanjang tidak dipahami sebagai satu kuantitas dan dipahami sebagai satu “kemungkinan tak terhingga” (Wittgenstein, 1975: PR 138).

Wittgenstein berpandangan bahwa karena satu himpunan matematika adalah satu ekstensi yang terhingga, orang tidak dapat mengukur dengan penuh makna melalui satu daerah yang takberhingga dan tidak ada sesuatu seperti konjungsi tak terhingga atau disjungsi tak terhingga (Moore 1955: 2-3). Pandangan ini dapat dijelaskan dengan barisan proposisi berikut p_1, p_2, p_3, \dots dan disusun proposisi baru $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \dots$. Karena proposisi yang berada di daerah tak terhingga tidak dapat diketahui nilai kebenarannya, maka konjungsi secara serempak seluruh proposisi yang ada dalam barisan tersebut tidak dapat ditentukan nilai

kebenarannya. Demikian pula untuk disjungsi $p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee \dots$, walaupun sepanjang suku-suku yang teramati bernilai salah, tetapi orang tidak tahu nilai kebenaran proposisi yang berada di daerah tak terhingga. Akibatnya, konjungsi atau disjungsi secara serempak dari seluruh proposisi yang ada dalam barisan tersebut tidak dapat ditentukan nilai kebenarannya. Orang tidak cukup waktu untuk mengetahui nilai kebenaran proposisi di wilayah tak terhingga. Wittgenstein menegaskan bahwa ia dapat memahami satu proposisi dengan satu permulaan dan dengan satu akhir, tetapi ia memperlmasalahakan tentang pemahaman terhadap proposisi yang tanpa akhir (Wittgenstein, 1975: PR 127).

Wittgenstein memperlmasalahakan makna proposisi seperti $(\exists n) 2 + n = 9$. Proposisi $(\exists n) 2 + n = 9$ dapat dinyatakan dengan $(2 + 1) \vee (2+2) \vee (2+3) \vee \dots$. Menurut Wittgenstein proposisi $(\exists n) 2 + n = 9$ berbeda makna dengan $2+3 = 9$. Disjungsi tak terhingga seperti $(2 + 1) \vee (2+2) \vee (2+3) \vee \dots$ kelihatannya dapat memberi satu aturan rekursif untuk membangun setiap suku berikutnya dari satu barisan tak terhingga. Dalam $f(n) = 2 + n$, ada satu bilangan ganjil yang memenuhi $2 + n = 9$, sehingga dari $(2 + 1) \vee (2+3) \vee (2+5) \vee \dots$ ada yang dapat menentukan nilai benar atau salahnya. Pemikiran seperti ini secara implisit membandingkan proposisi $(\exists n) 2 + n = 9$ dengan $(2 + 1) \vee (2+3) \vee (4+5) \vee \dots$. Proposisi yang kedua tidak menunjuk satu aturan, tetapi hanya menunjuk secara analogi menentukan suku berikutnya. Pemikiran seperti ini menurut Wittgenstein adalah pemikiran yang keliru (Wittgenstein, , 1974; PG 451), sebab $(\exists n) 2 + n = 9$ mengandung kontradiksi. Ia berpendapat bahwa satu ekspresi yang mengkuantifikasi satu wilayah tak terhingga adalah satu proposisi yang tak bermakna, kecuali jika kita mempunyai bukti, sebagai contoh bahwa satu bilangan n yang khusus memiliki satu hukum khusus. Implikasi dari pendapat ini adalah bahwa Wittgenstein menyarankan untuk tidak menggunakan ekspresi $(\exists x, y, z, n) (x^n + y^n = z^n)$ untuk menyatakan $3^2 + 4^2 = 52$ (Wittgenstein, 1975; PR 150). Kesimpulan berdasarkan atas uraian dalam karyanya *Philosophical Grammar* dan *Philosophical Remarks* adalah Wittgenstein menempatkan diri pada posisi radikal, bahwa semua ekspresi yang membuat kuantitas melampaui satu wilayah tak terhingga, baik *conjectures* maupun “bukti umum satu teorema”

adalah ekspresi tak bermakna. Proposisi dengan ekspresi seperti itu adalah proposisi matematika yang tidak sebenarnya (Wittgenstein, 1975; PR 138).

Dalam *Tractatus*, Wittgenstein mengkritik secara halus terhadap teori himpunan. Dalam *Philosophical Grammar* dan *Philosophical Remarks*, kritik Wittgenstein tampak lebih tegas dan keras. Ia memulai serangan terus-menerus terhadap teori himpunan. Menurut Wittgenstein teori himpunan adalah “sepenuhnya bohong” (Wittgenstein, 1975: PR 145, 174; Wittgenstein, 1974: PG 464, 470) dan “menggelikan” (Wittgenstein, 1974: PG 464). Idiomnya yang merusak menyesatkan dan kemungkinan paling sederhana kesalahan penerjemahan adalah sangat mendorong pada khayalan (Hintikka, 1993: 24, 27). Salah satu kritiknya adalah tentang himpunan tak hingga. Kritik ini mirip dengan kritik terhadap barisan tak terhingga.

Dalam teori himpunan tidak semua ketakterhinggaan yang sebenarnya dapat disajikan dengan simbol matematika dan oleh karena itu hanya dapat dideskripsikan dan tidak direpresentasikan. Sebagai contoh, himpunan dari semua bilangan prima tidak dapat disajikan dengan simbol matematika seluruhnya, himpunan tersebut dapat disajikan dengan “{bilangan prima}” atau dengan kata-kata “setiap unsur dalam himpunan tersebut adalah bilangan prima”. Menurut Wittgenstein menggunakan teori himpunan itu seperti membeli kucing dalam karung (Wittgenstein, 1974: PG 468; Wittgenstein, 1975: PR 170). Menurut Wittgenstein “kesalahan dalam pendekatan teori himpunan terdiri atas waktu dan lagi dalam memperlakukan hukum dan mendaftar sebagai satu cara yang esensial”. Kalimat “kita tidak dapat mengurutkan semua bilangan dari satu himpunan, tetapi kita dapat memberikan deskripsi” adalah tidak bermakna. Wittgenstein menyatakan bahwa “teori himpunan adalah salah” dan tidak bermakna (Wittgenstein, 1974: PR 174), sebab teori himpunan mensyaratkan satu simbol yang dibuat-buat untuk tanda tak terhingga (Wittgenstein, 1974: PG 469). Teori himpunan dimulai dengan konsep “secara prinsip himpunan tak terhingga dapat disajikan dengan menyebutkan satu persatu anggota, tetapi karena keterbatasan fisik manusia, himpunan tak terhingga dideskripsikan secara intensional”. Menurut Wittgenstein, hal itu tidak akan mungkin dan benar-benar terjadi dalam matematika, bagi matematika

sesungguhnya hanya kalkulus yang memusatkan perhatiannya pada tanda yang berkaitan dengan pengoperasian yang sesungguhnya (Wittgenstein, 1974: PG 469). Fakta menunjukkan bahwa matematika tidak dapat dideskripsikan, matematika hanya dapat dikerjakan dan digunakan.

Pemikiran Wittgenstein dalam *Philosophical Remarks* dan *Philosophical Grammar* menekankan bahwa dalam matematika segalanya bersifat sintaksis dan tanpa makna. Ia juga berpendapat bahwa kalkulus tidak membutuhkan penerapan yang lebih. Aritmetika adalah salah satu jenis geometri. Proposisi dengan ekspresi itu adalah proposisi matematika yang tidak sebenarnya (Wittgenstein, 1975: PR 168). Pemikiran Wittgenstein dalam *Philosophical Remarks* dan *Philosophical Grammar* banyak dipengaruhi oleh pemikiran Hilbert dan Brouwer.

E. Pemikiran dalam Remarks on the Foundations of Mathematics

Karya utama Wittgenstein sesudah tahun 1933 adalah *Philosophical Investigation* untuk bagian pertama diselesaikan pada tahun 1936 di Norwegia dan *Remarks on the Foundations of Mathematics* yang disusun antara tahun 1937-1944. Dua karya tersebut disajikan dengan gaya dialektika dan seperti berbicara dengan teman. *Remarks on the Foundations of Mathematics* dipublikasikan pertama kali pada tahun 1956. Salah satu pandangan penting yang dikemukakan Wittgenstein dalam *Remarks on the Foundations of Mathematics* adalah “*Mathematics as a Human Invention*”. Pada *Philosophical Remarks* dan *Philosophical Grammar*, pemikiran Wittgenstein diungkapkan dengan kalimat “*we make mathematics*” (Wittgenstein, 1974: PG 469-70) pada RFM dengan ungkapan “*we ‘invent’ mathematics*” (Wittgenstein, 1978: RFM I, 168; II, 38; V, 5, 9 and 11) dan “*the mathematician is not a discoverer: he is an inventor*” (Wittgenstein, 1978: RFM, Appendix II 2; Diamond, 1976: LFM 22, 82). Kutipan ini menunjukkan akan kekonsistenan pemikiran Wittgenstein bahwa matematika adalah ciptaan manusia. Pandangan Wittgenstein bahwa “*Mathematics as a Human Invention*” dapat diungkapkan dengan kalimat lain bahwa “Tidak ada matematika kecuali yang diciptakan oleh manusia” atau “Matematika, semuanya diciptakan oleh manusia” atau “Matematika ada setelah diciptakan oleh manusia”. Proses

manusia menciptakan matematika dengan jalan mengonstruksinya. Pendapat yang berdasarkan atas pemahaman bahwa “Tuhanlah sumber segala ilmu” jelas akan bertentangan dengan pandangan Wittgenstein. Pendapat Wittgenstein seolah-olah meniadakan Tuhan. Pendapat itu mungkin dapat diterima oleh penganut agama yang taat apabila diartikan secara relatif, artinya matematika adalah kreasi atau ciptaan manusia dengan mendapatkan petunjuk dari Tuhan dan petunjuk itu bias berikan kepada manusia dengan cara yang ditentukan oleh Tuhan sendiri. Pandangan Wittgenstein bahwa matematika adalah ciptaan manusia atau buatan manusia adalah pendapat yang secara konstan dipertahankan dari pemikiran yang tertuang dalam *Philosophical Remarks* dan *Philosophical Grammar* sampai pemikiran yang tertuang dalam *Remarks on the Foundations of Mathematics*.

Komentar Wittgenstein tentang ketakterhinggaan diungkapkan dengan wacana sebagai berikut:

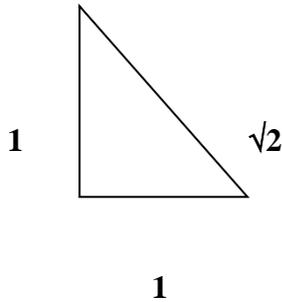
Then is infinity not actual _can I not say: “these two edge of the slab meet at infinity”?

Say, not: “the circle has this property because it passes through the two points at infinity ...”; but: “the properties of the circle can be regarded in this (extraordinary) perspective.

It is essentially a perspective, and a far-fetched one. (Which does not express any reproach.) But it must always be quite clear how far-fetched this way of looking at it is. For otherwise its real significance is dark (Wittgenstein, 1978: 279-280; RFM V 21).

Wacana ini menunjukkan bahwa Wittgenstein tetap menolak ketakterhinggaan yang sebenarnya dan juga menolak ekstensi matematik tak terhingga. Wittgenstein secara konsisten terus-menerus mengatakan bahwa bilangan irrasional adalah aturan untuk mengonstruksi ekspansi terbatas, bukan ekstensi matematik tak terhingga. Konsep desimal tak terbatas dalam proposisi matematika adalah bukan konsep deret. Ia menyatakan bahwa *“The concept of infinite decimals in mathematical propositions are not concepts of series, but of the unlimited technique of expansion of series”* (Wittgenstein, 1978: RFM IV 11). Pendapat Wittgenstein ini dapat dijelaskan dengan menggunakan contoh bilangan irrasional $\sqrt{2}$ dan Π . Konsep $\sqrt{2}$ berpangkal pada teorema Pythagoras pada segitiga siku-siku sama kaki yang panjang

kaknya 1 sehingga sisi miringnya adalah $\sqrt{2}$, konsep $\sqrt{2}$ bukan konsep deret. Walaupun berdasarkan perhitungan $\sqrt{2} = 1,4142135623\dots$ yang banyaknya angka di belakang koma tidak berakhir dan tidak berulang, akan tetapi $\sqrt{2}$ dapat diperlihatkan berada pada wilayah terhingga bukan ekstensi matematika takterhingga.



Gambar 1

Konsep Π adalah konsep yang berpangkal pada perbandingan antara keliling satu lingkaran dengan diameternya, bukan satu konsep deret tak terhingga. Walaupun berdasarkan perhitungan $\Pi = 3,142857\dots$ yang banyaknya angka di belakang koma tidak berakhir dan tidak berulang, akan tetapi Π bukan ekstensi matematika takterhingga. Ada bilangan irrasional yang konsepnya berdasarkan konsep deret takterhingga. Bilangan e adalah satu bilangan yang diperoleh melalui satu definisi.

Definisi $e = \sum 1/n!, n = 0,1,2,3,\dots$ (Rudin, 1986: 53).

Berdasarkan perhitungan $e = 2,718281828459045\dots$ (Purcell, 1954: 10). Hardy and Wright telah membuktikan bahwa e adalah bilangan irrasional, demikian pula Apostol menegaskan dengan teorema berikut: *If $e^x = 1 + x + x/(2!) + x^2/(3!) + \dots + x^n/(n!) + \dots$, then the number e is irrational* (Apostol, 1979 : 7). Wittgenstein berpendapat bahwa tidak ada aturan, hukum, maupun alat yang sistematis untuk mendefinisikan setiap bilangan irrasional secara intensional, artinya tidak ada kriteria yang lengkap untuk bilangan irrasional. Uraian ini memperlihatkan bahwa sampai pada pemikiran yang terakhir Wittgenstein tetap menolak ketakberhinggaan.

Wittgenstein membahas hubungan antara penerapan matematika dengan kebermaknaan matematika. Ia menyatakan bahwa “tanda atau simbol adalah juga digunakan dalam pakaian tentara” adalah esensial dalam matematika (Wittgenstein,1978: *RFM* V 2). Pendapat Wittgenstein ini merupakan penjelasan tentang wujud penggunaan penerapan simbol atau tanda di luar matematika. Tanda yang digunakan dalam matematika membentuk tata permainan bahasa matematika, tanda yang digunakan di luar matematika membentuk permainan sendiri yang dapat disebut “permainan tanda”. Penerapan tanda di luar matematika sesuai dengan minat Wittgenstein menggunakan bahasa alamiah dan bahasa formal dalam berbagai bentuk kehidupan. Ia juga mengakui bahwa matematika memainkan peran penerapan dalam berbagai bentuk kegiatan manusia seperti IPTEK. Penerapan matematika yang sangat luas mengendorkan kritik Wittgenstein terhadap teori himpunan sebagaimana kritik yang disampaikan pada *Philosophical Remarks* dan *Philosophical Grammar* yang sangat dipengaruhi oleh aliran formalisme. Ia mengatakan bahwa jika tata permainan bahasa matematika hanya dibatasi pada tanda matematika dan menghindarkan diri dari tanda yang bukan tanda matematika, maka teori himpunan hanya akan menjadi satu permainan tanda yang bersaifat formal. Penalaran ini mendorong Wittgenstein mengintroduksi kembali penerapan matematika lebih luas sebagai satu syarat perlu dari satu tata permainan bahasa. Pada *Philosophical Remarks* dan *Philosophical Grammar*, Wittgenstein menekankan bahwa satu kalkulus matematika tidak membutuhkan satu penerapan matematika yang lebih (Wittgenstein,1974: *PR* 109; Waismann, 1979; *WVC* 105). Perubahan pemikiran Wittgenstein dari pemikiran yang tertuang pada *Philosophical Remarks* dan *Philosophical Grammar* ke *Remarks on the Foundations of Mathematics* yang sangat prinsip dan sangat penting pada matematika, yaitu mengintroduksi kriteria penerapan matematika yang lebih luas. Kriteria itu digunakan untuk membedakan “tanda permainan” dari tata permainan bahasa matematika.” Perubahan pemikiran ini tidak berarti bahwa kritik Wittgenstein terhadap teori himpunan berubah. Pemikiran yang terakhir ini menegaskan bahwa jika teori himpunan tidak mempunyai penerapan matematika yang lebih luas, maka matematika hanya akan terfokus pada kalkulasi, bukti, dan subjek yang menarik dari kalkulasi untuk satu tes (Wittgenstein,1978:

RFM II, 62). Wittgenstein tidak berarti menyalahkan kalkulasi, ia hanya mengingatkan agar matematika tidak hanya membicarakan kalkulasi dan bukti. Setelah satu sistem matematika terbentuk harus dilanjutkan dengan interpretasi, baik yang abstrak maupun yang real dan berguna untuk memecahkan berbagai masalah yang ada di dalam realitas kehidupan. Namun demikian, Wittgenstein tetap berpendapat bahwa operasi dalam satu perhitungan matematika adalah formal murni dan bersifat sintaksis. Matematikawan benar-benar pemain yang memainkan sebuah permainan berdasarkan aturan tertentu. Wittgenstein menegaskan dengan ungkapan “*It is of course clear that the mathematician, in so far as he really is ‘playing a game’ does not infer. For here ‘playing’ must mean: acting in accordance with certain rules*” (Wittgenstein, 1978: *RFM* V,1). Matematika merupakan sebuah permainan yg memiliki arti bahwa dalam pembuktian tanda tidak membutuhkan makna. Makna tanda diperlukan untuk penerapan lebih luas atau penerapan di luar matematika.

F. Penutup

Ada perubahan pemikiran Wittgenstein tentang matematika sebagaimana yang dikandung dalam *Tractatus*, *Philosophical Remarks* dan *Philosophical Grammar*, dan *Remarks on the Foundations of Mathematics*. *Tractatus* disajikan dengan gaya *assertoric* dan *aphoristic*. Pemikiran matematika Wittgenstein dalam *Tractatus* dapat dikatakan sebagai pemikiran awal Wittgenstein tentang matematika. Pemikiran awal Wittgenstein berakhir dengan selesainya disusunnya *Tractatus* pada tahun 1918 dan berakhir 1922, yang banyak dipengaruhi oleh Russell dan Frege. Pemikiran Wittgenstein yang tertuang dalam *Philosophical Grammar* dan *Philosophical Remarks* dapat disebut pemikiran tengah Wittgenstein tentang matematika. *Philosophical Remarks* dan *Philosophical Grammar* disusun antara tahun 1929-1933 dan disajikan dengan gaya *argumentative*, yang banyak dipengaruhi oleh Hilbert dan Brouwer. Pemikiran Wittgenstein tentang matematika yang dikandung dalam *Remarks on the Foundations of Mathematics* atau tulisan lain yang disusun setelah tahun 1933 dapat disebut sebagai pemikiran akhir. *Remarks on the Foundations of Mathematics* dan *Philosophical Investigations* disajikan dengan gaya dialog dan seperti berbicara dengan teman sendiri.

Pada pemikiran tengah Wittgenstein berbicara “aritmetika sebagai satu jenis geometri” (Wittgenstein,1974: *PR* 109 & 111), pada pemikiran akhir mengatakan “aritmetika adalah satu jenis bukti geometri” (Wittgenstein,1978: *RFM* I, App. III, 14), aritmetika sebagai ketegasan bukti secara geometris (Wittgenstein,1978: *RFM* III, 43) dan aritmetika sebagai satu penerapan secara geometris berdasarkan atas transformasi aturan (Wittgenstein,1978: *RFM* VI 2). Pemikiran akhir Wittgenstein ini menunjukkan bahwa jika matematika dibebaskan dari semua kontennya, maka akan tinggal tanda-tanda tertentu yang dapat dikonstruksi dari yang lain berdasarkan atas aturan tertentu. Pada pemikiran tengah dikatakan bahwa satu kalkulus matematika tidak membutuhkan satu penerapan matematika yang lebih luas, pada pemikiran akhir diintroduksikan kriteria penerapan matematika yang lebih luas. Wittgenstein menganggap bahwa penerapan matematika secara luas merupakan satu syarat perlu bagi kebermaknaan matematika. Perubahan pemikiran ini merupakan perubahan yang sangat prinsip dan sangat penting pada pemikirannya atas matematika. Pemikiran tengah dan akhir Wittgenstein tentang matematika yang paling penting dan konstan adalah pandangannya bahwa “*mathematics is ours, human invention*”, “*everything in mathematics is invented*”, dan “*the mathematician is not a discoverer: he is an inventor*”. Pemikiran akhir Wittgenstein menegaskan bahwa tidak ada matematika kecuali dan sesudah diciptakan oleh manusia.

Perkembangan pemikiran filsafat Wittgenstein disepakati oleh para ahli terbagi atas dua periode, yaitu pemikiran periode pertama atau pemikiran awal dan periode pemikiran yang kedua atau pemikiran akhir. Perkembangan pemikiran Wittgenstein atas matematika dapat dikelompokkan menjadi tiga periode atau tahap, yaitu pemikiran awal (sampai 1922), pemikiran tengah (1923-1932) dan pemikiran akhir (1933-1951). Perkembangan pemikiran tersebut dipengaruhi oleh karya dan diskusinya dengan para pemikir seperti Frege, Russell, Hilbert, Brouwer, dan para anggota lingkaran Wina. Pemikiran akhir Wittgenstein menegaskan bahwa matematika adalah ciptaan manusia dan menolak konsep ketakterhinggaan sebagai satu kuantitas. Pemikiran Wittgenstein atas matematika tidak dapat dimasukkan ke dalam aliran filsafat matematika platonisme, logisisme, formalisme, maupun intuitionisme. Para ahli filsafat juga tidak satu pendapat tentang

pemikiran Wittgenstein tentang matematika dalam filsafat matematika. Tujuan pengkajian terhadap pemikiran Wittgenstein tentang matematika adalah untuk menentukan keutuhan pemikirannya, letak pemikirannya di antara berbagai aliran filsafat matematika, dan pengaruhnya terhadap perkembangan filsafat matematika.

DAFTAR PUSTAKA

- Apostol, Tom M.. 1979. **Mathematical Analysis**. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company
- Bertens, K. 2002. **Filsafat Barat Kontemporer: Inggris–Jerman**. Jakarta: PT Gramedia Pustaka Utama.
- Collinson, Diane. 2001. **Lima Puluh Filosof Dunia yang menggerakan**. (Pent. Ilzamudin Ma'mur dan Mufti Ali). Jakarta: PT RajaGrafindo Persada.
- Finch, Henry Le Roy. 1977. **Wittgenstein–The Later Philosophy**. Atlantic Highlands, N.J.: Humanities Press.
- Floyd, Juliet. 2002. “**Number and Ascriptions of Number in Wittgenstein's Tractatus,**” in **Perspectives on Early Analytic Philosophy: Frege, Russell, Wittgenstein**, E. Reck (ed.). New York: Oxford University Press: 308-352.
- Fraleigh, John B. 1974. **A First Course in Abstract Algebra**. London: Addison-Wesley Publishing Company
- Frascolla, Pasquale. 1994. **Wittgenstein's Philosophy of Mathematics**. London and New York: Routledge.

- Hardy, G.H and Wright, E.M.. 1938. **“An Introduction to the Theory of Number”** New York: Oxford University Press.
- Hers, Reuben. 1997. **What is Mathematics, Really?** London: Jonathan Cape.
- Hintikka, Jaakko. 1993. **“The Original Sinn of Wittgenstein's Philosophy of Mathematics,”** in Wittgenstein's Philosophy of Mathematics. K. Puhl, (ed.). Vienna: Verlag Hölder-Pichler-Tempsky: 24-51.
- Kaelan. 2003. **Filsafat Analitik Menurut Ludwig Wittgenstein: Relevansinya bagi Pengembangan Filsafat Bahasa.** Disertasi Fakultas Filsafat UGM.
- Kremer, Michael. 2002. **“Mathematics and Meaning in the Tractatus,”** Philosophical Investigations.
- Matar, <http://www.tau.ac.il/humanities/philos/segel/matar.html>
- Monk, Ray. 1990. **Ludwig Wittgenstein: The Duty of Genius.** New York: The Free Press.
- Moore, A. W.. 2003. **“On the Right Track”** , Mind. Vol. 112, No. 446: 307-321.
- Mudhofir, Ali.2001. **Kamus Filsuf Barat.** Yogyakarta: Pustaka Pelajar.
- Munitz Milton K. 1981. **Contemporary Analytic Philosophy.** New York: Macmillan Publishing Co.
- Purcell, Edwin J.. 1984. **Kalkulus dan Geometri Analitis** (Pent. Rawuh dan Bana Kartasasmita). Jakarta: Erlangga.
- Richter, Duncan J. 2006,
<http://www.utm.ed/research/jep/w/witgens.htm>
- Rodych, Victor. 2007. **Wittgenstein's Philosophy of Mathematics.** First published Fri 23 2007. <http://Plato.stanford.edu/entries/Wittgenstein.mathematics>

- Rudin, Walter. 1986. **Principles of Mathematical Analysis**. London: McGraw-Hill Book Company
- Sluga, Hans and Stern, David G.. 1996. **The Cambridge Companion to Wittgenstein**. New York: Cambridge University Press.
- Waismann, Friedrich. 1979. **Wittgenstein and the Vienna Circle**, edited by B.F. McGuinness; translated by Joachim Schulte and B.F. McGuinness. Oxford: Basil Blackwell.
- Wittgenstein, L. 1951. **Tractacus Logico Philosophicus**. London: Routledge & Kegan Paul Ltd.
- Wittgenstein, L. 1953. **Philosophical Investigation** (transled by G.E.M. Anscombe). Oxford: Basil Blackwell.
- Wittgenstein, L, 1974, **Philosophical Grammar**, (Rush Rhees, ed., translated by Anthony Kenny. Oxford: Basil Blackwell.
- Wittgenstein, Ludwig. 1975. **Philosophical Remarks. Rush Rhees**, (ed.); translated by Raymond Hargreaves and Roger White. .Oxford: Basil Blackwell.
- Wittgenstein, L. 1978. **Remarks on the Foundation of Mathematics** (Revised Edition). Cambridge: Massahusetts Institute of Technology Press
- Biletzki Anat and [Anat Matar](#), 2006,
<http://plato.stanford.edu/fundraising>
- Rodych, Victor, 2007,
<http://plato.stnford.edu/entiries/Wittgenstein.mathematics/>.