

Pemodelan Awal *Ground Penetrating Radar* dengan Metode *Discontinuous Galerkin* dan PML Berenger

Pranowo¹

Abstract— This paper discusses the development of Discontinuous Galerkin method, which has both linear shape function and weight function, for modeling Ground Penetrating Radar (GPR) in heterogeneous media. The triangular meshes are used due to their flexibility to deal with complex geometries. The Berenger Perfectly Matched Layer (PML) is used as absorbing boundary condition at the truncation boundaries. The numerical results of the DG method are compared with the exact solutions and the numerical results of FDTD method and the comparisons show that DG method has better accuracy than FDTD method and more stable for long time simulation. The simulation results of GPR show that the PML works well. Propagating waves at the edge of absorbing boundaries can be suppressed without any significant reflection. The results also show that various waves e.g., transmission waves, reflection waves, and diffraction waves produced by heterogeneous material can be simulated well.

Intisari— Makalah ini membahas pengembangan metode Discontinuous Galerkin (DG) dengan fungsi bentuk dan bobot linier untuk pemodelan Ground Penetrating Radar (GPR) di dalam media heterogen. *Mesh* dengan elemen segitiga digunakan karena mampu menangani bentuk geometri yang rumit. *Perfectly Matched Layer* (PML) Berenger digunakan sebagai kondisi batas penyerap pada sisi batas media. Perbandingan hasil perhitungan metode DG dengan jawaban eksak dan metode FDTD menunjukkan bahwa metode DG mempunyai akurasi yang lebih baik dibanding metode FDTD, dan lebih stabil untuk simulasi dengan durasi yang panjang. Simulasi GPR menunjukkan bahwa PML bekerja dengan baik dan mampu menyerap gelombang yang keluar tanpa ada pantulan gelombang kembali ke dalam media secara signifikan. Hasil simulasi juga menunjukkan bahwa berbagai macam gelombang seperti gelombang transmisi, refleksi, dan difraksi yang timbul karena material heterogen dapat disimulasikan dengan baik.

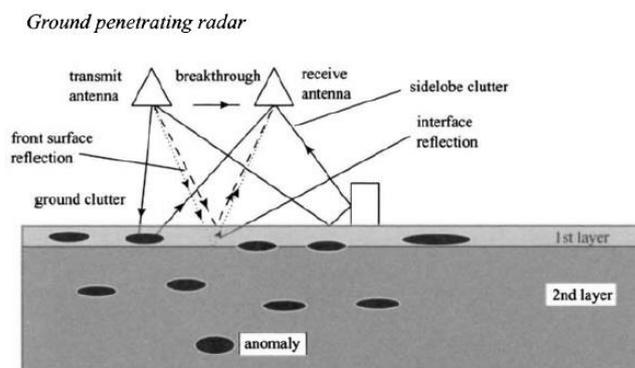
Kata Kunci— Pemodelan, simulasi, gelombang, GPR, *Discontinuous Galerkin*, PML.

I. PENDAHULUAN

Ground Penetrating Radar (GPR) adalah suatu peranti untuk pencitraan (*imaging*) bagian bawah permukaan bumi. Peranti ini bekerja berdasarkan prinsip refleksi dan transmisi gelombang elektromagnetik.

Peranti ini dapat digunakan untuk mendeteksi keberadaan suatu benda yang terkubur dalam tanah, struktur lapisan tanah, ketebalan sedimentasi, maupun ketebalan es. Selain itu, juga dapat digunakan untuk mengetahui posisi besi tulangan dalam blok beton. Prinsip kerja GPR dapat diilustrasikan seperti pada Gbr. 1. Peranti utama terdiri atas dua macam antenna yang

ditempatkan dekat dengan permukaan tanah atau objek yang diteliti [1].



Gbr. 1 Prinsip kerja GPR [1].

Karena data eksperimen yang diperoleh dari pengukuran GPR dalam media yang heterogen adalah kompleks dan sukar untuk diinterpretasikan, maka data numerik hasil simulasi GPR digunakan untuk mempelajari proses perambatan gelombang elektromagnetik GPR. Simulasi dilakukan dengan cara menyelesaikan persamaan Maxwell yang memodelkan perambatan gelombang elektromagnetik secara numerik. Metode yang dikenal luas adalah metode *Finite Difference Time Domain* (FDTD) yang dikembangkan oleh K. S. Yee pada tahun 1966 [2].

Penggunaan metode FDTD untuk pemodelan GPR beserta pengembangannya telah banyak dilakukan. Penelitian itu antara lain adalah pemodelan deteksi pipa dalam tanah dengan FDTD 3-dimensi [3]. Diskretisasi *finite-difference* orde-4 untuk turunan ruang juga telah digunakan untuk meningkatkan akurasi metode FDTD [4]. Sedangkan untuk meningkatkan kestabilan, metode *Alternating Direct Implicit* diusulkan untuk integrasi waktu [5][6].

Metode FDTD memang mudah digunakan untuk pemodelan GPR, tetapi sulit digunakan jika bentuk geometri model rumit. FDTD menggunakan *grid* berbentuk kotak untuk memodelkan permukaan geometri yang melengkung atau tidak lurus, sehingga pemodelan numeriknya tidak cocok dan mengalami penurunan akurasi. Untuk mengatasi hal tersebut metode *Finite Volume Time Domain* (FVTD) diusulkan untuk menyelesaikan persamaan Maxwell [7][8][9]. Metode FVTD bersifat fleksibel dan mampu menangani kerumitan bentuk geometri.

Usaha untuk menambah akurasi metode numerik terus dilakukan. Metode *Discontinuous Galerkin* (DG) dikembangkan untuk penyelesaian Persamaan Maxwell [10][11] dalam rentang waktu yang panjang. Metode DG ini juga dikembangkan untuk pemodelan GPR 2-dimensi [12][13]. Dalam penelitian tersebut fungsi polinomial orde tinggi

¹Dosen, Magister Teknik Informatika Universitas Atma Jaya Yogyakarta, Jl. Babarsari 43 Yogyakarta 55281 INDONESIA (telp: 0274-487711; e-mail: pran@mail.uajy.ac.id)

digunakan sebagai fungsi bentuk dan bobot. Media yang dimodelkan bersifat heterogen dan dispersif. Selain itu *absorbing boundary condition* yang digunakan adalah UPML. Penggunaan UPML memerlukan tambahan persamaan yang semula adalah tiga persamaan menjadi delapan persamaan.

Dalam makalah ini diusulkan penggunaan metode *Finite Element Discontinuous Galerkin* untuk pemodelan awal GPR. Fungsi basis yang digunakan adalah fungsi polinomial linier dalam elemen segitiga dan *absorbing boundary condition* yang digunakan adalah PML Berenger [14].

II. PEMODELAN DAN ALGORITME

A. Persamaan Model

Persamaan model yang digunakan adalah Persamaan Maxwell dalam mode TM 2-dimensi yang dapat ditulis seperti berikut:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\mathbf{q} = [E_z \quad H_x \quad H_y]^T$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/\varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/\mu & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1/\varepsilon & 0 \\ 1/\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

E_z adalah medan listrik dan (H_x, H_y) adalah medan magnetik. ε adalah permitivitas material dan μ adalah permeabilitas material.

Karena media untuk simulasi GPR 2-dimensi berukuran besar, maka media perlu dipotong dan pada batas potongan tersebut diberikan syarat batas yang dapat menyerap dan meredam gelombang yang keluar dari media. Dalam makalah ini yang digunakan sebagai syarat batas tersebut adalah *Perfectly Matched Layer (PML)* yang diusulkan oleh Berenger, seperti yang ditunjukkan pada Gbr. 2. Dengan menggunakan PML, maka medan listrik dipecah menjadi dua komponen sejajar dan tegak lurus seperti berikut [14]:

$$E_z = (E_{zx} + E_{zy}) \quad (2)$$

dengan demikian, (1) diubah menjadi:

$$\varepsilon \frac{\partial E_{zx}}{\partial t} + \sigma_x E_{zx} = \frac{\partial H_y}{\partial x} \quad (3)$$

$$\varepsilon \frac{\partial E_{zy}}{\partial t} + \sigma_y E_{zy} = -\frac{\partial H_x}{\partial y} \quad (4)$$

$$\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} + \sigma_y^* H_x = -\frac{\partial (E_{zx} + E_{zy})}{\partial y} \quad (5)$$

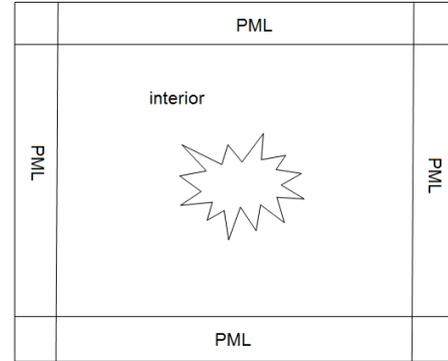
$$\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} + \sigma_x^* H_y = \frac{\partial (E_{zx} + E_{zy})}{\partial x} \quad (6)$$

Parameter peredam diberikan dalam lapisan penyerap seperti pada (7) dan (8).

$$\sigma_x(x) = d_0 \left(\frac{x}{\delta} \right)^2 \quad \text{dan} \quad \sigma_y(y) = d_0 \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 \quad (7)$$

$$\sigma_x^*(x) = \sigma_x \frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \quad \text{dan} \quad \sigma_y^*(y) = \sigma_y \frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \quad (8)$$

Dengan δ adalah tebal lapisan penyerap dan d_0 adalah fungsi dari koefisien refleksi. ε_0 adalah permitivitas material dan μ_0 adalah permeabilitas ruang hampa.



Gbr. 2 Syarat Batas PML.

B. Diskretisasi Metode Discontinuous Galerkin

Turunan ruang pada persamaan model dibuat diskret metode DG. Langkah awal metode ini adalah membagi domain ruang 2-dimensi menjadi sejumlah elemen segitiga. Semua variabel (medan listrik dan magnetik) dihubungkan dengan suatu fungsi interpolasi. Fungsi ini disebut fungsi bentuk (*shape function*). Langkah selanjutnya adalah melakukan prosedur pengintegralan Galerkin pada setiap elemen sebanyak dua kali dengan terlebih dahulu mengalikan persamaan model dengan fungsi bobot (*weight function*). Prosedur pengintegralan ini menggunakan fungsi bentuk dan bobot yang sama dan integral keliling pada setiap batas antar elemen dipertahankan tetap ada, sehingga dimungkinkan ada dua nilai yang berbeda pada batas elemen. Karena ada dua nilai yang berbeda pada batas, maka metode ini disebut metode *Discontinuous Galerkin*.

Elemen segitiga dipilih dalam penelitian ini karena semua domain 2-dimensi yang tidak teratur dapat didekati dengan membaginya menjadi sejumlah elemen segitiga. Gbr. 3 menunjukkan elemen segitiga. Fungsi interpolasi linier dalam elemen segitiga dapat dinyatakan sebagai berikut [15]:

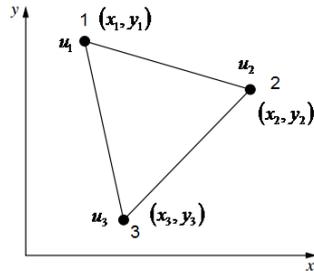
$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{2A} (a_1 + b_1 x + c_1 y) \\ N_2 &= \frac{1}{2A} (a_2 + b_2 x + c_2 y) \\ N_3 &= \frac{1}{2A} (a_3 + b_3 x + c_3 y) \end{aligned} \quad (9)$$

$$a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2 ; \quad b_1 = y_2 - y_3 ; \quad c_1 = x_3 - x_2$$

$$a_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3 ; \quad b_2 = y_3 - y_1 ; \quad c_2 = x_1 - x_3$$

$$a_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1 ; \quad b_3 = y_1 - y_2 ; \quad c_3 = x_2 - x_1$$

$$A = \frac{1}{2} [(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_3 y_1 - x_1 y_3) + (x_2 y_3 - x_3 y_1)]$$



Gbr. 3 Elemen segitiga.

Interpolasi variabel $u(x, y)$ dalam elemen segitiga menggunakan fungsi di atas dilakukan seperti berikut:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 \\ &= [N_1 \quad N_2 \quad N_3] [u_1 \quad u_2 \quad u_3]^T \\ &= \mathbf{N} \mathbf{u} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\mathbf{N} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3] ; \quad \mathbf{u} = [u_1 \quad u_2 \quad u_3]^T$$

dengan variabel $u(x, y)$ mewakili variabel medan listrik dan magnet.

Dengan menggunakan prosedur yang sudah diterangkan pada bagian atas maka (3) - (6) diubah satu persatu menjadi persamaan semi aljabar seperti berikut.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{E}_{zx}}{\partial t} &= -\frac{\sigma_x}{\epsilon} \mathbf{E}_{zx} + \frac{1}{\epsilon} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}_x \mathbf{H}_y + \\ &\mathbf{M}^{-1} \mathbf{L} \left(\mathbf{F}_s \circ \left(\mathbf{n}_x \circ \frac{1}{\epsilon} (\mathbf{H}_y^- - \mathbf{H}_y^+) \right) - \frac{c}{2} (\mathbf{E}_{zx}^- - \mathbf{E}_{zx}^+) \right) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{E}_{zy}}{\partial t} &= -\frac{\sigma_y}{\epsilon} \mathbf{E}_{zy} - \frac{1}{\epsilon} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}_y \mathbf{H}_x - \\ &\mathbf{M}^{-1} \mathbf{L} \left(\mathbf{F}_s \circ \left(\mathbf{n}_y \circ \frac{1}{\epsilon} (\mathbf{H}_x^- - \mathbf{H}_x^+) \right) - \frac{c}{2} (\mathbf{E}_{zy}^- - \mathbf{E}_{zy}^+) \right) \end{aligned} \quad (12)$$

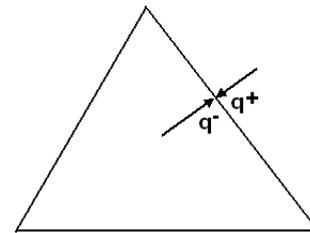
$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{H}_x}{\partial t} &= -\frac{\sigma_y^*}{\epsilon} \mathbf{H}_x - \frac{1}{\mu} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}_y (\mathbf{E}_{zx} + \mathbf{E}_{zy}) - \\ &\mathbf{M}^{-1} \mathbf{L} \left(\mathbf{F}_s \circ \left(\mathbf{n}_y \circ \frac{1}{\mu} (\mathbf{E}_{zx}^- + \mathbf{E}_{zx}^+ - \mathbf{E}_{zy}^- - \mathbf{E}_{zy}^+) \right) - \frac{c}{2} (\mathbf{H}_x^- - \mathbf{H}_x^+) \right) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{H}_y}{\partial t} &= -\frac{\sigma_x^*}{\epsilon} \mathbf{H}_y + \frac{1}{\mu} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}_x (\mathbf{E}_{zx} + \mathbf{E}_{zy}) - \\ &\mathbf{M}^{-1} \mathbf{L} \left(\mathbf{F}_s \circ \left(\mathbf{n}_x \circ \frac{1}{\mu} (\mathbf{E}_{zx}^- + \mathbf{E}_{zx}^+ - \mathbf{E}_{zy}^- - \mathbf{E}_{zy}^+) \right) - \frac{c}{2} (\mathbf{H}_y^- - \mathbf{H}_y^+) \right) \end{aligned} \quad (14)$$

Suku terakhir pada persamaan di atas menunjukkan perhitungan fluks. Dalam makalah ini fluks numerik dihitung dengan fluks bertipe Lax-Friedrich.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}_x &= \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \\ \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}_y &= \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \\ \mathbf{M}^{-1} \mathbf{L} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 5 & 1 & -3 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & 5 & 1 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & 1 & 5 & 1 & 5 \end{bmatrix} \\ \mathbf{F}_s &= \frac{1}{A} [L_{12} \quad L_{12} \quad L_{23} \quad L_{23} \quad L_{13} \quad L_{13}]^T \end{aligned}$$

dengan L_{12}, L_{23}, L_{13} adalah panjang sisi segitiga. Adapun tanda + dan - pada persamaan semi aljabar menunjukkan nilai variabel pada batas dalam dan luar elemen, seperti terlihat pada Gbr. 4.



Gbr. 4 Ilustrasi fluks masuk dan keluar

Syarat awal pada kondisi waktu $t = 0$ adalah semua variabel medan listrik dan magnet dalam domain bernilai nol. Sedangkan syarat batas pada sisi luar domain bernilai nol, karena semua variabel saat mencapai sisi batas terluar domain akan bernilai nol karena sudah terserap oleh PML.

Persamaan-persamaan semi aljabar tersebut di atas diintegrasikan menurut waktu menggunakan metode Euler Eksplisit, Metode ini sederhana dan mudah implementasinya.

C. Algoritme Solusi Numerik

Secara garis besar langkah-langkah urutan kerja algoritme berbasis CPU adalah seperti berikut.

1. Inisialisasi
 - a. Membaca data *mesh* (koordinat, matriks koneksi elemen ke *nodal*).
 - b. Membaca data normal, vektor v_{mapB} , v_{mapM} dan v_{mapP} (matriks untuk pemetaan *nodal* pada batas elemen digunakan untuk perhitungan fluks).
 - c. Menentukan parameter PML (dimensi PML dan profil faktor damping).
 - d. Menghitung luasan setiap elemen segitiga.
 - e. Menginisialisasi vektor medan listrik dan magnet.
 - f. Menentukan waktu final, langkah waktu, dan jumlah iterasi waktu.
2. Menyelesaikan hasil diskretisasi DG dengan integrasi waktu Euler Eksplisit.
 - a. Loop langkah waktu dimulai
 - Menghitung selisih nilai medan listrik dan magnet di batas elemen.

- Menghitung integral keliling (suku terakhir (11) - (14)).
 - Menghitung integral luasan (suku pertama dan kedua (11) - (14)).
 - Meng-update nilai medan listrik dan waktu untuk langkah waktu berikutnya.
 - Memeriksa apakah waktu sudah melampau batas waktu maksimum atau belum. Jika belum, kembali ke langkah no. 2
- b. Langkah waktu selesai.

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

Implementasi algoritme di atas menggunakan Bahasa C dan Matlab digunakan untuk visualisasinya. Perhitungan numerik diberikan dalam bentuk dua contoh perhitungan numerik. Contoh pertama berupa simulasi gelombang berdiri (*standing wave*), sedangkan contoh kedua memberikan simulasi perambatan gelombang elektromagnetik GPR dalam media heterogen dengan bentuk yang relatif kompleks.

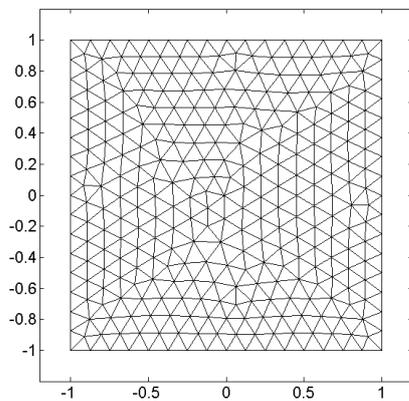
A. Contoh Perhitungan Pertama

Contoh ini menunjukkan perbandingan akurasi metode DG dengan fungsi basis linier dengan jawaban eksak dan metode FDTD. Media yang digunakan mempunyai properti material $\epsilon = 1$ unit dan $\mu = 1$. Media berukuran 2×2 unit². Mesh pada Gbr. 5 terdiri atas 568 elemen segitiga dan 317 titik nodal. Lebar langkah waktu adalah $\Delta t = 0.002$. Syarat awal berupa fungsi *cosinus* untuk medan listrik E_z , sedangkan variabel lainnya diberi nilai nol.

$$E_z = \cos(1.5\pi x)\cos(1.5\pi y) ; -1 \leq (x, y) \leq 1 \quad (15)$$

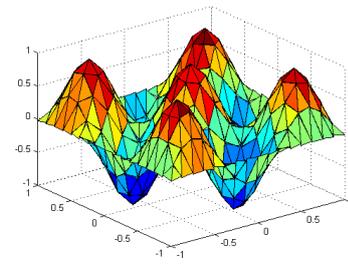
Jawaban eksak dari kasus ini adalah:

$$E_z = \cos(1.5\pi x)\cos(1.5\pi y)\cos(1.5\sqrt{2}\pi t).$$

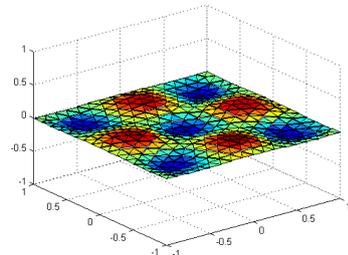


Gbr. 5 Mesh kotak 2-dimensi terdiri atas 568 elemen.

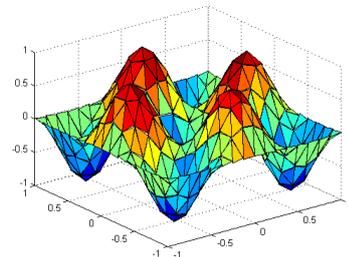
Gelombang yang terjadi adalah gelombang berdiri (*standing wave*). Gelombang ini tidak merambat tetapi hanya berubah amplitudonya menurut waktu. Gbr. 6 sampai dengan Gbr. 9 menunjukkan gambar urutan perambatan gelombang dalam media homogen saat $t = 0.2, t = 4, t = 6,$ dan $t = 8$. Dari gambar-gambar tersebut terlihat bahwa gelombang tidak merambat tetapi hanya berosilasi di tempat, sedangkan amplitudo terlihat turun naik.



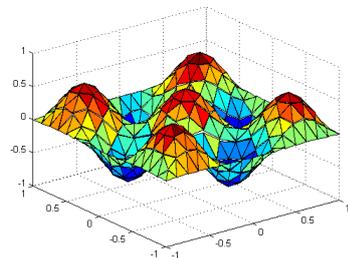
Gbr. 6 Amplitudo gelombang saat $t = 0,05$.



Gbr. 7 Amplitudo gelombang saat $t = 0,25$.



Gbr. 8 Amplitudo gelombang saat $t = 0,4$.



Gbr. 9 Amplitudo gelombang saat $t = 0,8$

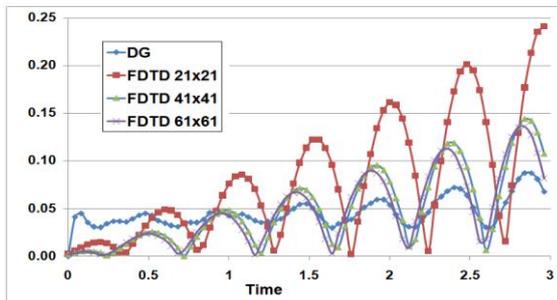
Galat (*error*) perhitungan dihitung dengan rumus:

$$\text{Galat} = \max |E_{z(DG)} - E_{z(eksak)}| \quad (16)$$

Selain dibandingkan dengan jawaban eksak, hasil perhitungan metode DG juga dibandingkan dengan metode FDTD. Dalam makalah ini, integrasi waktu FDTD menggunakan metode Euler Eksplisit supaya sama dengan integrasi waktu metode DG. Hasilnya seperti pada Gbr. 10.

Dari gambar tersebut dapat diketahui bahwa perhitungan numerik metode DG berakurasi tinggi. Pada awal perhitungan metode DG mempunyai galat relatif tinggi, tetapi seiring dengan bertambahnya waktu, galat metode FDTD meningkat dengan cepat, sedangkan galat metode DG relatif hanya meningkat sedikit, sehingga untuk perhitungan jangka panjang metode DG mempunyai perhitungan lebih stabil karena mempunyai penumpukan galat yang relatif rendah. Selain itu,

dengan jumlah derajat kebebasan yang lebih rendah (jumlah elemen $\times 3 = 568 \times 3 = 1704$), metode DG mempunyai tingkat galat yang lebih rendah dibanding metode DG yang mempunyai derajat kebebasan yang lebih tinggi ($61 \times 61 = 3721$).



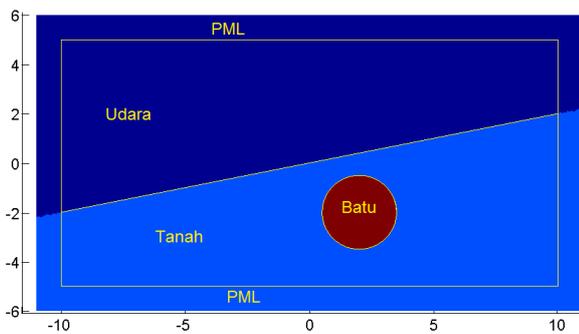
Gbr. 10 Galat maksimum antara metode DG dan FDTD.

B. Contoh Perhitungan Kedua

Contoh kedua berupa simulasi perambatan gelombang elektromagnetik heterogen 2-dimensi. Mesh berukuran $20 \times 10 \text{ m}^2$ dengan ketebalan PML 1 m di sekeliling domain ruang dibagi menjadi 58746 elemen segitiga. Material terdiri atas tiga jenis material (udara, tanah dan batu). Susunan material dan bentuk domain ruang dapat dilihat pada Gbr. 11, sedangkan mesh diperlihatkan pada Gbr. 12. Properti material dapat dilihat pada Tabel I (nilai properti material diambil hanya sekedar untuk uji simulasi dan tidak menunjukkan nilai data sebenarnya).

TABEL I
PROPERTI MATERIAL

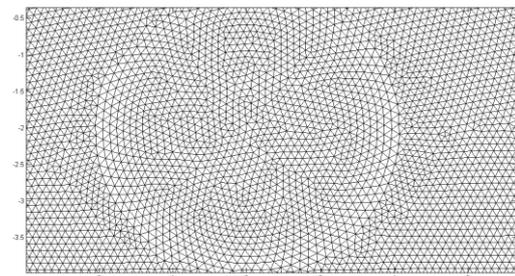
No	Material	Permittivity (ϵ)	Permeability (μ)
1	Udara	$8,854 \times 1.0e-12$	$4\pi \times 1,0e-7$
2	Tanah	$4 \times 8,854 \times 1.0e-12$	$4\pi \times 1,0e-7$
3	Batu	$16 \times 8,854 \times 1.0e-12$	$4\pi \times 1,0e-7$



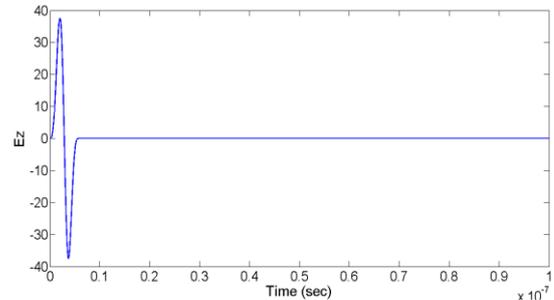
Gbr. 11 Domain ruang berikut distribusi material dan PML.

Syarat awal untuk semua medan listrik dan magnet adalah bernilai nol. Sumber (source) berupa fungsi turunan Blackman-Harris [8] dengan frekuensi pusat 200 MHz digunakan untuk membangkitkan perambatan gelombang. Sumber ini memodelkan pemancar (transmitter) gelombang dan diletakkan di posisi koordinat $x = 0,5$ dan $y = 2,4$ sedangkan penerima (receiver) diletakkan di $x = 2,01$ dan $y = 1,97$. Langkah waktu yang digunakan adalah $\Delta t = 5 \text{ ps}$.

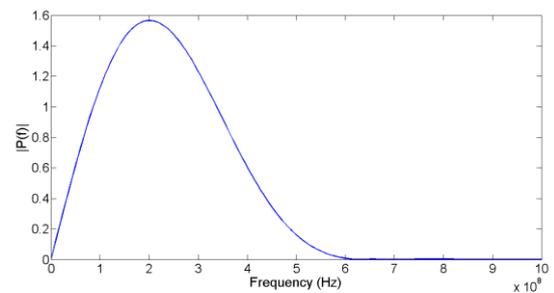
Gbr. 13 menunjukkan sinyal sumber sedangkan Gbr. 14 menunjukkan spektrum sinyal tersebut.



Gbr. 12 Mesh untuk area disekitar material batu.



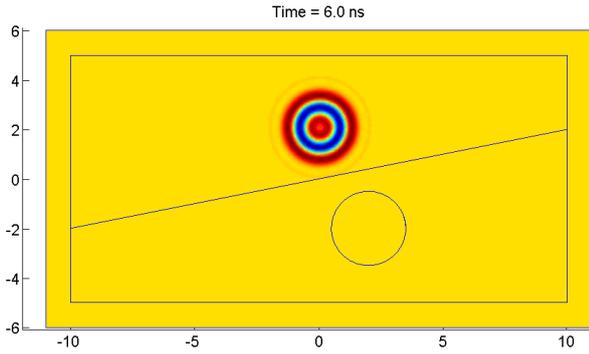
Gbr. 13 Source Blackman-Harris.



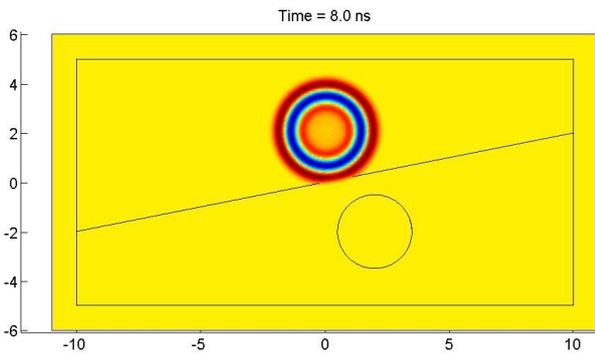
Gbr. 14 Spektrum source Blackman-Harris.

Gbr. 15 sampai dengan Gbr. 23 menunjukkan gambar urutan perambatan gelombang dalam media heterogen saat $t = 6 \text{ ns}$ sampai $t = 52 \text{ ns}$. Dari gambar-gambar tersebut terlihat bahwa front gelombang merambat secara radial ke segala arah di udara. Front gelombang berbentuk lingkaran yang membesar. Setelah menabrak lapisan tanah, gelombang sebagian di pantulkan dan sisanya diteruskan (Gbr. 17 dan Gbr. 18). Sebagian gelombang yang diteruskan ke dalam tanah juga akan dipantulkan dan diteruskan setelah menabrak material batu. Selain itu juga terlihat proses difraksi atau pembelokan gelombang akibat melewati penghalang batu (Gbr. 18 hingga Gbr. 20). Gelombang yang keluar dari domain ruang dan masuk ke PML akan diserap oleh PML sehingga terdispersi hilang. Hal ini terlihat jelas pada urutan Gbr. 18 sampai Gbr. 23. Dengan demikian dapat dikatakan bahwa hasil simulasi bersesuaian dengan teori yang menyatakan bahwa jika gelombang elektromagnetik menabrak material yang mempunyai properti material yang berbeda (impedans juga berbeda), maka gelombang akan sebagian diteruskan dan sisanya akan dipantulkan. Selain itu penggunaan PML versi Berenger dengan diskretisasi DG juga

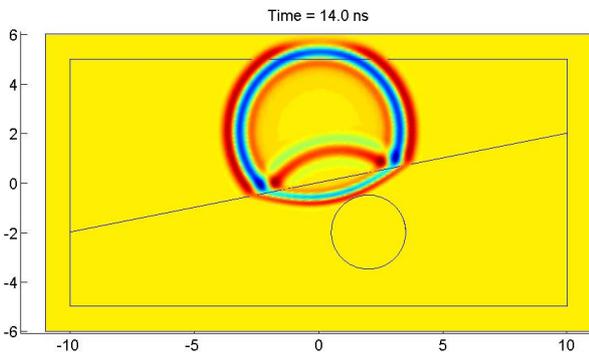
bekerja dengan baik, mampu menyerap gelombang yang masuk PML.



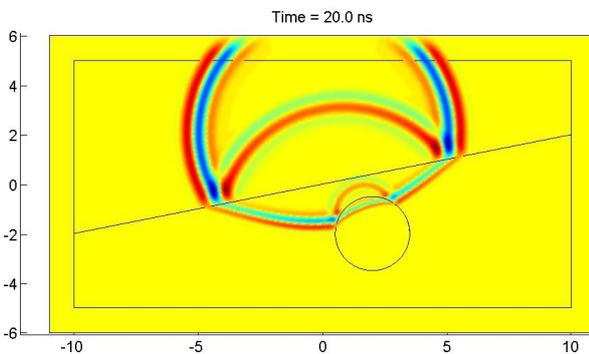
Gbr. 15 Perambatan gelombang elektromagnetik dalam media heterogen saat $t=6$ ns.



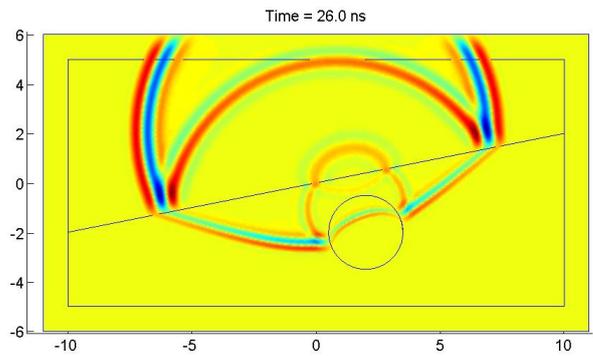
Gbr. 16 Perambatan gelombang elektromagnetik dalam media heterogen saat $t=8$ ns.



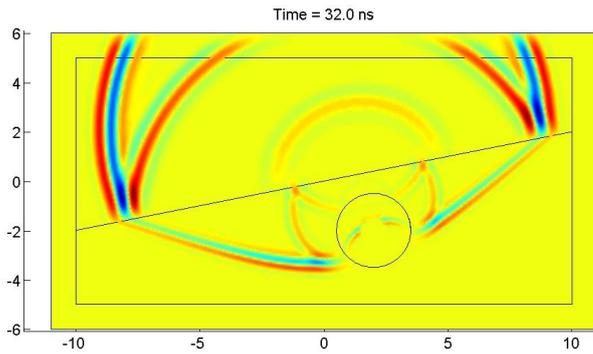
Gbr. 17 Perambatan gelombang elektromagnetik dalam media heterogen saat $t=14$ ns.



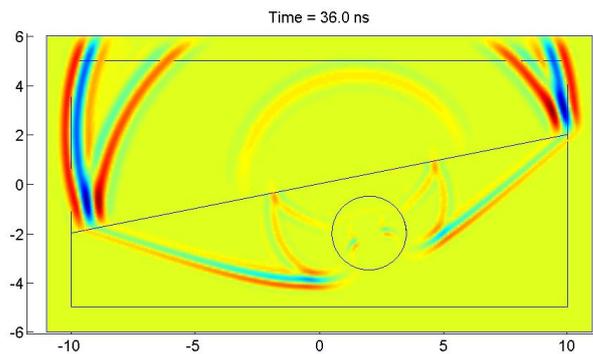
Gbr. 18 Perambatan gelombang elektromagnetik dalam media heterogen saat $t=20$ ns.



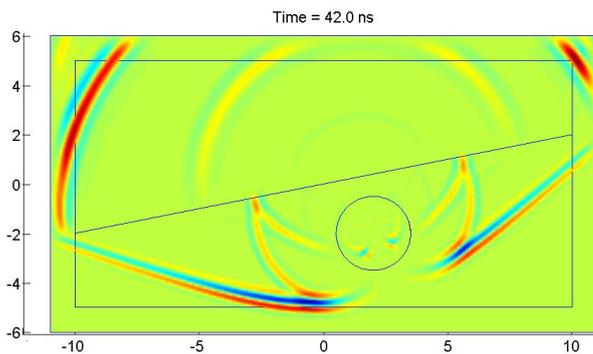
Gbr. 19 Perambatan gelombang elektromagnetik dalam media heterogen saat $t=26$ ns.



Gbr. 20 Perambatan gelombang elektromagnetik dalam media heterogen saat $t=32$ ns.



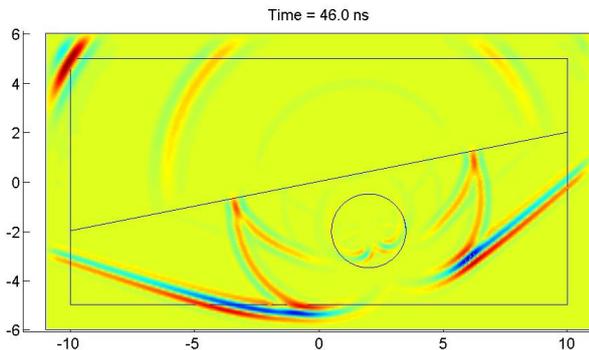
Gbr. 21 Perambatan gelombang elektromagnetik dalam media heterogen saat $t=36$ ns.



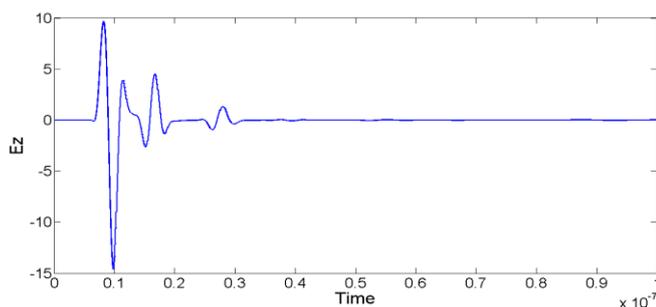
Gbr. 22 Perambatan gelombang elektromagnetik dalam media heterogen saat $t=42$ ns.

Proses fenomena perambatan gelombang elektromagnetik seperti transmisi, refleksi, dan difraksi gelombang direkam

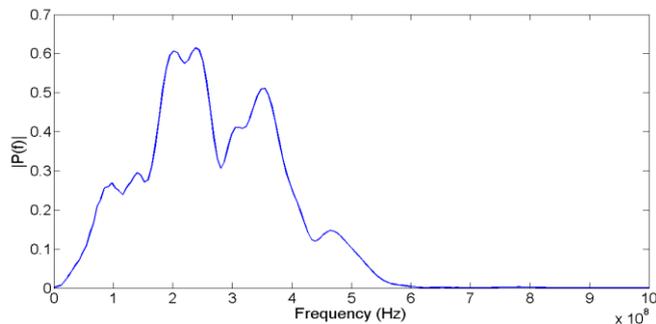
oleh *receiver* dan hasilnya ditampilkan pada Gbr. 24, sedangkan Gbr. 25 menunjukkan spektrum data rekaman. Dari gambar tersebut terlihat jelas bahwa frekuensi paling dominan sinyal data rekaman adalah tetap 200 Mhz.



Gbr. 23 Perambatan gelombang elektromagnetik dalam media heterogen saat $t=46$ ns.



Gbr. 24 Data receiver.



Gbr. 25 Spektrum data receiver.

IV. KESIMPULAN

Dari analisis di atas, dapat diambil beberapa kesimpulan, yaitu metode DG mempunyai akurasi yang lebih tinggi dibanding metode FDTD, meskipun jumlah titik *nodal* yang digunakan lebih sedikit. Selain itu penumpukan galat metode DG juga lebih sedikit, sehingga perhitungan numerik relatif lebih stabil untuk durasi waktu simulasi yang panjang. Metode DG dengan syarat batas PML juga dapat digunakan untuk simulasi GPR. Fenomena gelombang seperti refleksi, transmisi, dan difraksi dapat disimulasikan dengan baik. Gelombang yang keluar dari domain juga dapat diserap dengan baik oleh PML.

Untuk penelitian selanjutnya perlu ditambahkan jumlah *receiver* dan posisi sumber juga dibuat bervariasi, sehingga diperoleh cukup data simulasi untuk pencitraan bagian dalam bumi. Penggunaan pemrograman paralel berbasis GPU juga diperlukan untuk mempercepat proses perhitungan numerik.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Universitas Atma Jaya Yogyakarta yang telah bersedia mendanai penelitian ini melalui skema Hibah Internal.

REFERENSI

- [1] D. Daniels, *Ground Penetrating Radar*, 2nd Edition, The Institution of Electrical Engineers, London, 2004.
- [2] K. S. Yee, "Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell's Equations in Isotropic Media", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, May 1966 p 302-307.
- [3] J. M. Bourgeois, "A Fully Three-Dimensional Simulation of a Ground-Penetrating Radar: FDTD Theory Compared with Experiment", *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, Vol 34 no. 1 Jan 1996.
- [4] J. Irving and R. Knight, " Numerical modeling of ground-penetrating radar in 2-D using MATLAB", *Computers & Geosciences* 32 , p. 1247–1258, 2006.
- [5] N. Diamanti and A. Giannopoulos, "Implementation of ADI-FDTD subgrids in ground penetrating radar FDTD models", *Journal of Applied Geophysics* 67 , p. 309–317, 2009.
- [6] F.D. Shan and D. Q. Wei, "GPR numerical simulation of full wave field based on UPML boundary condition of ADI-FDTD", *NDT&E International* 44, p. 495–504, 2011.
- [7] Y. Shi and C.H. Liang, 2007, The finite-volume time-domain algorithm using least square method in solving Maxwell's equations, *Journal of Computational Physics* 226 (2007) p. 1444–1457.
- [8] K. Sankaran et al., "Cell-Centered Finite-Volume-Based Perfectly Matched Layer for Time-Domain Maxwell System", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Volume 54 issue 3 (2006) p.1269- 1276.
- [9] D. Baumann, et al., 2004, "Finite-volume time-domain (FVTD) modelling of a broadband double-ridged horn antenna", *Int. J. Numer. Model.*, 17 (2004) , p.285–298.
- [10] D. Dosopoulos et al., "An MPI/GPU parallelization of an interior penalty discontinuous Galerkin time domain method for Maxwell's equations", *Radio Science*, Vol. 46, RS0M05, 2011.
- [11] M. Min and P. Fischer, "An Efficient High-Order Time Integration Method for Spectral-Element Discontinuous Galerkin Simulations in Electromagnetics", *J Sci Comput*, p. 57:582–603,2013.
- [12] T. Lu et al., "Discontinuous Galerkin methods for dispersive and lossy Maxwell's equations and PML boundary conditions", *Journal of Computational Physics*, 200 (2004) , p. 549–580.
- [13] T. Lu et al., "Discontinuous Galerkin Time-Domain Method for GPR Simulation in Dispersive Media", *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, Vol. 43, No. 1, January 2005.
- [14] J.P. Berenger, "A Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves", *Journal of Computational Physics* 114, 1994.
- [15] R. W. Lewis, , P. Nithiarasu and K. N. Seetharamu, *Fundamentals of the Finite Element Method for Heat Transfer and Fluid Flow*, John Wiley & Sons, Chichester.