

Estimasi Parameter Model Nonlinear Menggunakan Analisis Sensitivitas dan Pengoptimalan Berbasis Turunan

Tua A. Tamba¹

Abstract—Model estimation based on the observation data of a system's states is an important subject in the study of dynamical systems. Maximum likelihood (ML) estimation is a stochastic estimation method which can be used to obtain an optimal set of parameter based on noisy measurements. This paper describes the method and implementation of the ML estimator to identify an optimal parameter set in a discrete-time nonlinear state space model. In particular, the optimal parameter set is defined as the value that minimizes the error between the actual and estimated model outputs of the system. This paper discusses a gradient-based optimization that is equipped with sensitivity analysis method for searching such a parameter set. Simulation results which describe an implementation of the proposed estimation method in a nonlinear system model are also discussed.

Intisari—Estimasi model berdasarkan data hasil pengukuran variabel sistem merupakan salah satu topik penting dalam studi sistem dinamik. Estimasi *maximum likelihood* (ML) merupakan suatu teknik estimasi stokastik yang dapat digunakan untuk menentukan nilai parameter optimal pada suatu model sistem dinamik berdasarkan data observasi yang bercampur dengan sinyal gangguan acak. Makalah ini memaparkan implementasi estimator ML untuk mengidentifikasi parameter sistem dinamik yang dimodelkan dengan persamaan ruang keadaan waktu diskrit. Secara khusus, parameter optimal didefinisikan sebagai nilai yang meminimalkan selisih antara data pengukuran aktual dan sinyal keluaran yang dihasilkan oleh model sistem dengan nilai parameter hasil estimasi. Penentuan parameter optimal dilakukan dengan metode pengoptimalan berbasis gradien yang dikombinasikan dengan analisis sensitivitas. Hasil simulasi numerik yang mengilustrasikan implementasi metode estimasi yang diusulkan pada suatu model *chemostat* juga didiskusikan.

Kata Kunci—Estimasi parameter, metode stokastik, estimator *maximum likelihood*, pengoptimalan, analisis sensitivitas.

I. PENDAHULUAN

Salah satu topik penting dalam studi sistem dinamik adalah terkait penentuan model analitik suatu sistem berdasarkan data observasi variabel sistem yang tersedia atau dapat diukur. Aspek terkait nonlinearitas dinamika sistem, data pengukuran yang tercampur sinyal gangguan acak, serta keterbatasan jumlah data yang dapat digunakan dalam analisis merupakan beberapa contoh aspek mendasar yang berkontribusi terhadap kompleksitas proses estimasi model sistem dinamik [1], [2].

Metode estimasi parameter Bayesian adalah salah satu teknik inferensi berbasis pendekatan stokastik yang sering digunakan untuk menentukan model sistem dinamik

berdasarkan data pengukuran yang tercampur sinyal gangguan acak [3]-[7]. Teknik estimasi ini pada esensinya menggunakan aturan Bayes dalam penentuan rapat probabilitas dari suatu model sistem dinamik terparameterisasi berdasarkan data hasil pengukuran yang tersedia. Secara khusus, inferensi terkait statistik dari vektor parameter p yang ditinjau ditentukan menggunakan aturan Bayes dan diformulasikan sebagai nilai ekspektasi dari p atau fungsi dari p sebagai berikut [3]-[5].

$$E(\psi(p) | y) = \int_p \psi(p | y) \psi(p) dp, \quad (1)$$

dengan $E(\cdot)$ merupakan operator ekspektasi bersyarat dan $f(p | y)$ adalah fungsi distribusi *posterior* dari p untuk data observasi y dari sistem yang tersedia. Isu mendasar dalam implementasi metode estimasi parameter Bayesian adalah terkait perhitungan nilai integral pada (1) yang melibatkan fungsi distribusi parameter yang dianalisis. Secara umum, solusi analitik integral ini tidak dapat ditentukan sehingga harus diperkirakan dengan metode numerik berbasis simulasi Monte Carlo. Sayangnya, selain terbentur potensi terjadinya permasalahan akumulasi kesalahan, metode simulasi Monte Carlo membutuhkan beban komputasi yang sangat besar jika digunakan pada model dengan dimensi parameter tinggi [6]-[7].

Estimator *maximum likelihood* (ML) merupakan salah satu metode alternatif untuk proses estimasi parameter. Pada estimator ML, permasalahan estimasi diformulasikan secara formal sebagai penentuan nilai parameter optimal (dengan kriteria tertentu) suatu model terparameterisasi (yang diyakini mendasari dinamika sistem yang ditinjau) berdasarkan data pengukuran variabel keadaan sistem yang ada [8], [9]. Beberapa keuntungan teknik estimasi ini adalah dimungkinkannya penggunaan informasi awal (*prior information*) yang tersedia terkait model dan sinyal gangguan pada sistem (rentang nilai atau distribusi) serta kemudahan mengasimilasi informasi baru dalam proses estimasi.

Estimator ML menentukan estimasi nilai q buah parameter $p = (p_1, \dots, p_q)$ pada model sistem dinamik berdasarkan data pengukuran sistem dan keyakinan awal (*prior belief*) yang mungkin diketahui tentang p . Keyakinan awal tersebut secara formal dinyatakan sebagai fungsi distribusi *prior* $f(p)$ yang mengindikasikan distribusi nilai probabilitas untuk setiap kemungkinan nilai p ketika data pengukuran terbarui belum ada. Ketergantungan nilai pengukuran $y = (y_1, \dots, y_m)$ sistem pada parameter p dinyatakan sebagai fungsi rapat probabilitas bersyarat $L(y | p) = \Pr(y | p)$. Fungsi $L(y | p)$ disebut fungsi *likelihood* dan dapat digunakan untuk memperbarui $f(p)$ setiap kali data pengukuran y yang baru diperoleh. Proses pembaruan dilakukan menggunakan aturan Bayes berikut [3]-[5]

¹ Program Studi Teknik Elektro (Mekatronika), Universitas Katolik Parahyangan, Jl. Ciumbuleuit no. 94, Bandung 40141, INDONESIA (telp: 022-203-2655; fax: 022-203-1110; e-mail: ttamba@unpar.ac.id)

$$f(p|y) = \frac{f(p)L(y|p)}{\mathfrak{N}} \Rightarrow f(p|y) \propto f(p)L(y|p) \quad (2)$$

dengan $\mathfrak{N} = \int_p f(p)L(y|p) dp$ adalah konstanta normalisasi. Fungsi *likelihood* dalam hal ini memodifikasi fungsi distribusi *prior* menjadi *posterior* ketika data pengukuran baru diperoleh. Dengan demikian, nilai parameter optimal ditentukan sebagai nilai p yang memaksimalkan fungsi *likelihood* $L(y|p)$.

Makalah ini memaparkan metode dan hasil implementasi estimator ML untuk mengestimasi parameter model sistem nonlinear dalam bentuk persamaan ruang keadaan waktu diskrit. Pada metode yang dibahas, parameter optimal didefinisikan sebagai nilai parameter yang meminimalkan selisih antara data pengukuran aktual dan sinyal keluaran sistem yang dihasilkan oleh nilai parameter yang diestimasi. Perhitungan parameter optimal dilakukan dengan metode pengoptimalan berbasis gradien yang dikombinasikan dengan analisis sensitivitas. Contoh implementasi metode estimasi parameter model yang diusulkan diilustrasikan melalui simulasi numerik penentuan parameter pada model *chemostat*.

II. DESKRIPSI DAN MODEL SISTEM

Ditinjau sistem dinamik dengan $n \in Z$ variabel keadaan $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ dan $\ell_x \in Z$ parameter $p^x \in \mathfrak{R}^{\ell_x}$ dengan masing-masing \mathfrak{R} dan Z adalah himpunan bilangan nyata dan bulat. Untuk waktu $t \geq 0$ serta nilai awal x_0 , dinamika sistem diasumsikan memenuhi persamaan diferensial berikut.

$$\dot{x}(t) = f(x(t), p^x, t), \quad x(0) = x_0, \quad (3)$$

Makalah ini meninjau metode estimasi parameter di model (3) berdasarkan data pengukuran variabel keadaan $x(t)$. Karena keterbatasan alat ataupun kesulitan dalam proses pengukuran, data pengukuran seringkali hanya diperoleh untuk sebagian dari variabel keadaan $x(t)$ [9]-[11]. Data pengukuran yang diperoleh juga umumnya tidak langsung dalam bentuk nilai masing-masing variabel keadaan, tetapi merupakan nilai kombinasi atau fungsi beberapa variabel keadaan. Untuk memperhitungkan kondisi ini, pengukuran dari sistem pada (3) diasumsikan secara abstrak sebagai suatu fungsi $g(x(t), p^y)$ yang memetakan variabel keadaan menjadi m pengukuran $y(t) \in \mathfrak{R}^m$. Dalam hal ini, model pengukuran untuk sistem pada (3) untuk waktu $t \geq 0$ dapat dituliskan sebagai berikut [10], [11].

$$y(t) = g(x(t), p^y, t), \quad (4)$$

dengan $p^y \in \mathfrak{R}^{\ell_y}$ dan $\ell_y \in Z$ adalah parameter pada fungsi pengukuran.

Data pengukuran pada (4) yang diperoleh dari sensor umumnya merupakan sinyal diskrit dalam jumlah terhingga serta tercampur sinyal gangguan acak. Jika y_{ij} menyatakan data pengukuran ke- j yang diperoleh pada waktu t_i ($i=1, \dots, T$), maka y_{ij} dapat diasumsikan sebagai gabungan dari nilai pengukuran yang sebenarnya ($v_j(t_i)$) dan suatu proses acak tertentu (v_{ij}), sehingga model pengukuran dapat dituliskan sebagai (5) [10], [12].

$$y_{ij} = y_j(t_i) + v_{ij}, \quad (5)$$

dengan v_{ij} diasumsikan memiliki distribusi Gaussian dengan nilai rata-rata nol dan varians σ_{ij}^2 .

Persamaan (3) sampai (5) merupakan dasar untuk proses estimasi parameter model sistem dinamik berdasarkan data pengukuran variabel keadaan yang lengkap ($m=n$) ataupun parsial ($m < n$). Permasalahan estimasi model dapat didefinisikan sebagai proses estimasi nilai parameter $p \equiv (p^x, p^y, x_0) = p_k$ untuk $k=1, \dots, K$ di sistem pada (3) sampai (4) berdasarkan data pengukuran pada (5).

III. ESTIMASI PARAMETER MODEL NONLINEAR

A. Estimator Maximum Likelihood (ML)

Salah satu metode estimasi parameter model sistem dinamik berdasarkan data pengukuran yang tercampur sinyal gangguan acak adalah dengan menggunakan estimator ML. Untuk sistem dengan model dinamik seperti pada (3) dan (4) serta pengukuran pada (5), estimator ML menentukan parameter optimal p^* sebagai nilai p yang memaksimalkan kecenderungan (*likelihood*) diperolehnya data pengukuran y tersebut. Secara matematis, p^* merupakan nilai p yang memaksimalkan *fungsi likelihood* $L(y|p)$ terhadap data pengukuran yang ditinjau [2], [5], [7], [10]-[12].

Jika sinyal acak pada (5) memenuhi distribusi Gaussian dengan nilai rata-rata nol dan varians σ_{ij}^2 , maka fungsi *likelihood* $L(y|p)$ dapat dituliskan sebagai berikut.

$$L(y|p) = \prod_{i=1}^T \prod_{j=1}^m \frac{1}{\sigma_{ij} \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ \frac{-1}{2\sigma_{ij}^2} [y_{ij} - g_j(x(t_i), p), p]^2 \right\}. \quad (6)$$

Dari sudut pandang efisiensi komputasi, maksimalisasi fungsi $L(y|p)$ di (6) lebih mudah dilakukan dengan minimalisasi nilai negatif logaritma $L(y|p)$ berikut [2], [5], [7], [10]-[12].

$$\begin{aligned} -\log[L(y|p)] &= -\log \left(\frac{1}{\sigma_{ij} \sqrt{2\pi}} \right) \\ &\quad - \log \left(\prod_{i=1}^T \prod_{j=1}^m \exp \left\{ \frac{-1}{2} R_{ij}(p)^2 \right\} \right) \quad (7) \\ &= \log(\sigma_{ij} \sqrt{2\pi}) + \sum_{i=1}^T \sum_{j=1}^m \frac{1}{2} R_{ij}^2(p), \end{aligned}$$

dengan $R_{ij}(p)$ merupakan fungsi residu sebagai berikut.

$$R_{ij}(p) = \sigma_{ij}^{-1} [y_{ij} - g_j(x(t_i), p), p] \quad (8)$$

Karena komponen $\log(\sigma_{ij} \sqrt{2\pi})$ pada (7) tidak bergantung pada nilai p , dapat disimpulkan bahwa nilai parameter optimal p^* pada estimator ML memenuhi (9) [2], [5], [7], [10]-[12].

$$p^* \equiv \arg \min_p \left[\sum_{i=1}^T \sum_{j=1}^m \frac{1}{2} R_{ij}^2(p) \right]. \tag{9}$$

Persamaan (9) mengindikasikan bahwa parameter optimal pada estimator ML adalah nilai yang meminimalkan jumlah kuadrat kesalahan (*sum of squared errors*) antara data pengukuran sinyal keluaran aktual dan data pengukuran sinyal keluaran yang dihasilkan oleh nilai parameter yang diestimasi.

B. Pengoptimalan Berbasis Turunan dan Analisis Sensitivitas

Salah satu metode komputasi nilai p^* pada (9) adalah dengan teknik pengoptimalan berbasis gradien. Pada teknik pengoptimalan ini, nilai solusi optimal di setiap iterasi diperbarui berdasarkan nilai gradien suatu fungsi residu $R_{ij}(p)$. Lebih spesifik, kandidat nilai solusi optimal ditentukan sebagai nilai parameter yang menghasilkan perubahan gradien fungsi residu terkecil atau kurang dari kriteria nilai toleransi kesalahan yang ditentukan sejak awal pada algoritme pengoptimalan [6]-[7], [11]-[13].

Pada implementasi algoritme pengoptimalan, perhitungan nilai gradien fungsi residu dapat dilakukan dengan menggunakan berbagai perangkat lunak komputasi, misalnya MATLAB [14]. Secara khusus, nilai gradien $R_{ij}(p)$ terhadap p untuk data pengukuran pada waktu $t = \tau$ ditentukan sebagai berikut [5], [7], [11]-[13].

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{ij}(p)}{\partial p_k} &= \frac{-1}{\sigma_{ij}} \frac{\partial g_j(x(t_i, p), p)}{\partial p_k} \\ &= \frac{-1}{\sigma_{ij}} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial g_j}{\partial x_n} \bigg|_{\tau} \frac{\partial x_n}{\partial p} \bigg|_{\tau} + \frac{\partial g_j}{\partial p} \bigg|_{\tau} \right) \\ &= \frac{-1}{\sigma_{ij}} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \bigg|_{\tau} \frac{\partial x_i}{\partial p_k} \bigg|_{\tau} + \frac{\partial g_j}{\partial p_k} \bigg|_{\tau} \right), \end{aligned} \tag{10}$$

dengan $j=1, \dots, m$ dan $k=1, \dots, K$. Komponen (dg_j/dx_i) dan (dg_j/dp_k) pada (8) merupakan matriks Jacobian $J_x^g \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ dan $J_p^g \in \mathfrak{R}^{m \times K}$ dari fungsi $g(x, p)$ terhadap vektor variabel keadaan x dan parameter p berikut.

$$J_x^g \equiv \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \tag{11a}$$

$$J_p^g \equiv \frac{\partial g_j}{\partial p_k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial p_K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial p_K} \end{bmatrix}. \tag{11b}$$

Sementara itu, (dx_i/dp_k) dalam (10) adalah komponen dari matriks sensitivitas $S(i, k)$ sebagai berikut.

$$S_p^x \equiv \frac{\partial x_i}{\partial p_k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial p_K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial p_K} \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{n \times K}. \tag{12}$$

Matriks Jacobian pada (11) dapat dihitung menggunakan komputasi simbolik (misalnya pada MATLAB) karena fungsi $g(x, p^y, t)$ pada (4) telah ditentukan/diketahui sejak awal. Di sisi lain, matriks sensitivitas pada (12) umumnya hanya dapat ditentukan dengan aproksimasi numerik. Dalam hal ini, aproksimasi dilakukan dengan terlebih dahulu mengintegrasikan (3) secara numerik dan hasilnya kemudian digunakan untuk menghitung nilai matriks sensitivitas (12). Kelemahan teknik aproksimasi numerik ini adalah kemungkinan timbulnya permasalahan akumulasi kesalahan numerik serta beban komputasi yang pengaruhnya akan menjadi sangat signifikan ketika digunakan pada model dengan banyak parameter. Untuk mengatasi permasalahan ini, matriks sensitivitas dapat ditentukan dengan lebih efisien menggunakan persamaan diferensial berikut [2], [5], [7], [11]-[13].

$$\begin{aligned} \frac{dS_p^x}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x_i}{\partial p_k} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial p_k} \left(\frac{\partial x_i}{\partial t} \right) \\ &= \frac{\partial f(x(t), p^x, t)}{\partial p_k} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i(x(t), p^x, t)}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial p_k} + \frac{\partial f_i}{\partial p_k} \end{aligned} \tag{13}$$

dengan nilai awal $S_p^x(0) = (dx_i/dp_k)(0)$. Komponen matriks $(\partial f_i(\cdot)/\partial x_i)$ dan $(\partial f_i(\cdot)/\partial p_k)$ dapat ditentukan secara analitik berdasarkan fungsi eksplisit $f_i(\cdot)$ yang ditinjau. Dalam hal ini, matriks sensitivitas dapat ditentukan dengan mengintegrasikan (3) dan (12) secara paralel terhadap variabel waktu sehingga beban komputasi tidak dipengaruhi oleh jumlah parameter pada model yang ditinjau.

C. Algoritme Estimasi Parameter Model

Metode estimasi parameter dengan pengoptimalan berbasis gradien dan analisis sensitivitas yang diusulkan diringkaskan pada Algoritme I. Pada Algoritme I, proses estimasi dimulai dengan penentuan nilai awal parameter p_0 dan nilai batas ϵ sebagai kriteria konvergensi untuk terminasi proses pengoptimalan. Berdasarkan nilai parameter terkini, solusi (3) dan (13) dihitung secara numerik dan kemudian digunakan untuk menentukan nilai residu (8) dan turunan (10). Pengoptimalan kemudian dapat dilakukan untuk menentukan nilai parameter optimal (9). Pengoptimalan ini dilakukan

secara iteratif sampai kriteria konvergensi ϵ terpenuhi. Dalam hal ini, nilai estimasi optimal didefinisikan sebagai nilai parameter dengan batas kesalahan yang memenuhi ϵ .

Algoritme I [7]-[8], [11]-[12]

Estimasi parameter optimal pada (9)

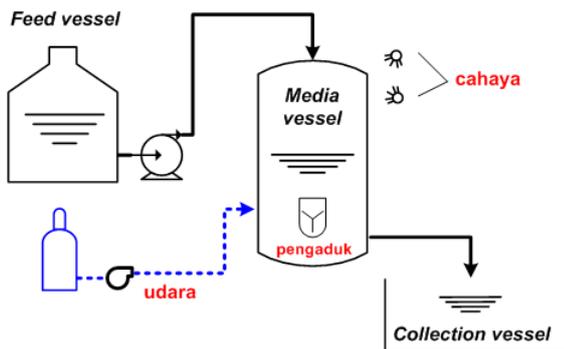
Masukan: Model sistem (3) dan (5), nilai parameter awal p_0 dan nilai batas ϵ untuk kriteria konvergensi pengoptimalan

Keluaran: Estimasi parameter optimal p^*

1. Dengan menggunakan nilai p dari iterasi sebelumnya, tentukan nilai integral dari persamaan (3) dan (13) secara numerik.
2. Tentukan nilai residu (8) dan turunan (10).
3. Tentukan parameter optimal (9) dengan pengoptimalan berbasis gradien (misalnya fungsi "Isqnonlin" pada MATLAB).
4. Perbaharui nilai estimasi parameter p dan kembali ke langkah 1. Lakukan iterasi 1-4 hingga kriteria konvergensi pengoptimalan ϵ tercapai.

IV. SIMULASI NUMERIK

Implementasi metode estimasi parameter dengan estimator ML yang diusulkan pada makalah ini diilustrasikan pada proses penentuan model dinamik untuk interaksi suatu sistem mikroorganisme yang dibiakkan di dalam *chemostat*, seperti ditunjukkan pada Gbr. 1.



Gbr. 1 Skematika sistem *chemostat*.

A. Deskripsi dan Model *Chemostat*

Chemostat merupakan suatu instrumen laboratorium yang dapat digunakan untuk membiakkan dan mengamati dinamika perkembangan bakteri atau mikroorganisme ketika diberi bahan makanan atau asupan nutrisi terbatas. Sebagaimana ditunjukkan pada Gbr. 1, suatu *chemostat* umumnya memiliki tiga komponen utama sebagai berikut [15]-[16].

1. Bejana pemasok (*feed vessel*), yaitu bejana berisi larutan yang mengandung nutrisi yang dibutuhkan oleh mikroorganisme yang dibiakkan untuk berkembang. Salah satu dari nutrisi ini dapat diatur berjumlah terbatas (disebut nutrisi pembatas/kontrol) untuk melihat pengaruhnya pada perkembangan mikroorganisme yang dibiakkan.

2. Bejana pembiakan (*media vessel*), yaitu bejana berisi larutan nutrisi tempat pembiakan mikroorganismenya.
3. Bejana penampungan (*collection vessel*), yaitu bejana penampung pembuangan dari bejana pembiakan. Larutan pada bejana ini mengandung organisme yang jumlahnya dapat diukur dan kemudian digunakan untuk mengestimasi jumlah mikroorganisme pada bejana pembiakan.

Selain tiga bejana utama tersebut, *chemostat* juga dilengkapi dengan beberapa instrumen seperti lampu, pipa saluran udara steril, serta pengaduk untuk mengatur kondisi lingkungan pendukung perkembangan organisme pada bejana pembiakan.

Salah satu contoh penggunaan *chemostat* adalah untuk pemodelan interaksi mikroorganisme pemangsa dan mangsa (*predator & prey*) antara alga hijau *chlorella* dan zooplankton *brachionus*. *Chlorella* merupakan alga hijau bersel tunggal yang berkembang biak melalui proses fotosintesis dengan bantuan CO_2 , air, cahaya, dan nutrisi. *Brachionus* merupakan zooplankton air tawar yang pertumbuhannya bergantung pada konsumsi alga hijau seperti *chlorella*. Pembiakan *chlorella* dan *brachionus* secara bersamaan pada *chemostat* dengan demikian dapat memicu interaksi jenis pemangsa (*brachionus*) dan mangsa (*chlorella*). Lebih jauh, pertumbuhan *chlorella* dapat dibatasi dengan mengontrol asupan nutrisi tertentu pada bejana pemasok, sedangkan pertumbuhan *brachionus* dibatasi oleh jumlah *chlorella* yang tersedia untuk dikonsumsi.

Makalah ini meninjau model dinamik untuk interaksi antara *chlorella* dan *brachionus* pada *chemostat* sebagai berikut [15].

$$\dot{N}(t) = \delta(N_{in} - N) - f_C(N)C \tag{14a}$$

$$\dot{C}(t) = f_1(N)C - f_2(C)B/\rho - \delta C \tag{14b}$$

$$\dot{R}(t) = f_2(C)R - (\delta + m + \lambda)R \tag{14c}$$

$$\dot{B}(t) = f_2(C)R - (\delta + m)R \tag{14d}$$

Pada (14), N_{in} adalah konsentrasi asupan nitrogen N yang dialirkan dari bejana pemasok secara konstan, δ adalah laju aliran larutan yang keluar dari bejana pembiakan, sementara masing-masing m dan λ adalah laju mortalitas *brachionus* akibat kematian mendadak dan penuaan. Variabel C menyatakan konsentrasi *chlorella* sedangkan R dan B masing-masing menyatakan konsentrasi *brachionus* yang dapat dan tidak dapat bereproduksi. Fungsi $f_1(N)$ dan $f_2(C)$ merupakan fungsi logistik sebagai berikut.

$$f_1(N) = \frac{b_C N}{K_C + N}, \quad f_2(C) = \frac{b_B C}{K_B + C} \tag{15}$$

Dengan mendefinisikan $x = [x_1; x_2; x_3; x_4]$ dengan $x_1 = N$, $x_2 = C$, $x_3 = R$, dan $x_4 = B$ sebagai vektor variabel keadaan dan $p^x = [p_1; p_2; p_3; p_4; p_5; p_6; p_7; p_8; p_9]$ dengan $p_1 = \delta$, $p_2 = N_{in}$, $p_3 = b_B$, $p_4 = b_C$, $p_5 = K_B$, $p_6 = K_C$, $p_7 = m$,

$p_8 = \lambda, p_9 = \rho$ sebagai vektor parameter sistem, maka model pada (14) dan (15) dapat ditulis dalam bentuk model (3) sebagai berikut.

$$\dot{x}(t) = f(x(t); p^x; t) = \begin{bmatrix} p_1(p_2 - x_1(t)) - f_1(x_2(t)) \\ f_1(x_1(t))x_2(t) - f_2(x_2(t))x_4(t)/p_9 - p_1 x_2(t) \\ f_2(x_2(t))x_3(t) - (p_1 + p_7 + p_8)x_3(t) \\ f_2(x_2(t))x_3(t) - (p_1 + p_7)x_3(t) \end{bmatrix} \quad (16)$$

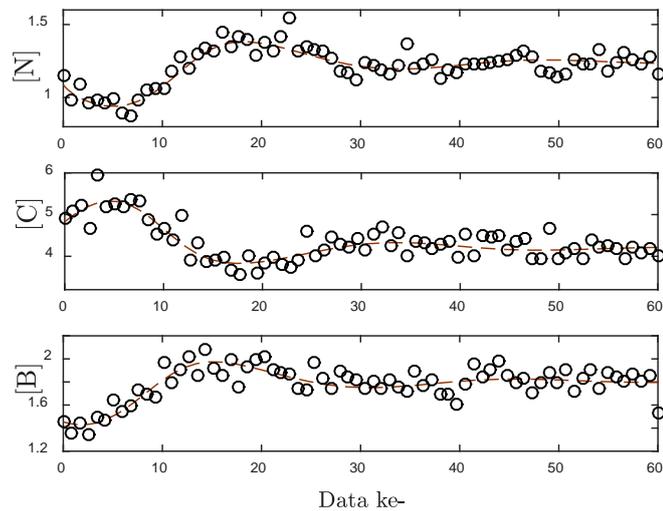
dengan kondisi awal $x(0) = x_0 \equiv [x_1(0); x_2(0); x_3(0); x_4(0)]$.

B. Estimasi Parameter Model dengan Data Hasil Simulasi

Untuk mengilustrasikan metode estimasi parameter yang diusulkan di makalah ini, model (14)-(16) disimulasikan pada MATLAB untuk memperoleh data yang diasumsikan sebagai hasil pengukuran dari *chemostat* [14]. Pada simulasi ini diasumsikan hanya ada satu kloning di keseluruhan populasi *chlorella*. Data pengukuran hasil simulasi tersebut kemudian digunakan oleh estimator ML untuk estimasi parameter model.

Model (14) disimulasikan pada MATLAB dengan kondisi awal $x_0 = [80;45;0,1;0,1]$ dan nilai parameter pada Tabel I. Data pengukuran dari *chemostat* diasumsikan hanya tiga, yaitu konsentrasi nitrogen di dalam bejana pembiakan dan total jumlah sel *chlorella* dan *brachionus*. Dalam hal ini, model pengukuran (4) untuk sistem ini memenuhi persamaan berikut.

$$y(t) = g(x(t), p^y, t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x(t). \quad (17)$$



Gbr. 2 Data pengukuran hasil simulasi.

Data pengukuran dari simulasi kemudian ditambah dengan sinyal acak yang memenuhi distribusi Gaussian dengan nilai rata-rata nol dan varians 0,1. Estimator ML disimulasikan

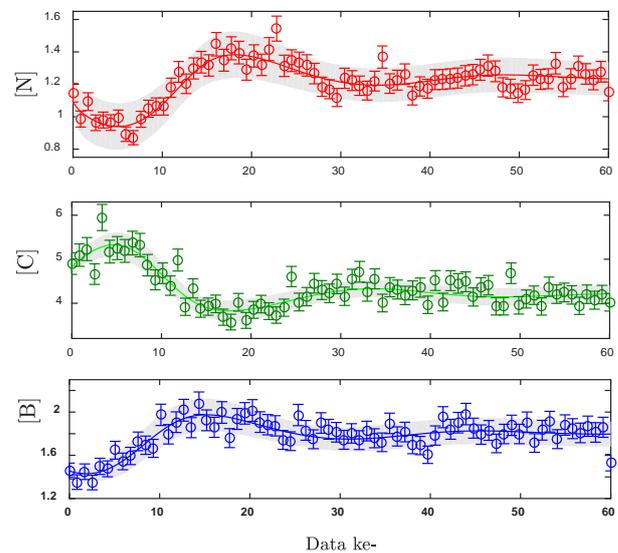
pada enam puluh data yang diasumsikan sebagai sampel pengukuran harian selama enam puluh hari. Selain itu, diasumsikan pula bahwa parameter p_1 dan p_2 diketahui nilainya berdasarkan konfigurasi awal pengoperasian *chemostat*. Dengan demikian, estimator ML hanya digunakan untuk mengestimasi nilai tujuh parameter tersisa yang tidak diketahui.

TABEL I
NILAI PARAMETER UNTUK SIMULASI MODEL (16)

δ	N_{in}	b_B	b_C	K_B	K_C	m	λ	ρ
0,04	80	2,25	3,3	15	4,3	0,055	0,4	0,25

TABEL II
NILAI PARAMETER AWAL DAN OPTIMAL DALAM ESTIMASI

	b_B	b_C	K_B	K_C	m	λ	ρ
p_0	4,08	7,31	41,52	5,25	0,07	0,49	0,62
p^*	2,116	3,29	13,74	4,849	0,056	0,41	0,252



Gbr. 3 Perbandingan model yang diidentifikasi estimator ML dengan data pengukuran serta batas *confidence interval*.

Gbr. 2 menunjukkan data pengukuran yang diperoleh dari hasil simulasi. Pada gambar ini, solusi model (16) ditunjukkan oleh kurva dengan garis terputus, sedangkan sampel data pengukuran yang tercampur sinyal gangguan acak ditunjukkan sebagai lingkaran kecil. Data pengukuran diskrit yang tercampur sinyal gangguan acak ini kemudian dianalisis menggunakan estimator ML.

Algoritme I diimplementasikan pada model (16)-(17) dan data pengukuran di Gbr. 2 untuk mengestimasi nilai parameter p_3 hingga p_9 . Nilai awal parameter p_0 pada simulasi ditunjukkan di Tabel II yang diperoleh melalui penambahan sinyal acak pada nilai p di Tabel I. Nilai parameter optimal p^* hasil estimasi Algoritme I juga ditunjukkan pada Tabel II. Prediksi rentang ketidakpastian pada respons model yang diestimasi akibat ketidakpastian nilai parameter optimal yang dihasilkan menggunakan estimator ML digambarkan sebagai sabuk kurva abu-abu di Gbr. 3. Kurva rentang ketidakpastian

ini ditentukan berdasarkan propagasi nilai *error* berikut [11]-[13].

$$\text{Cov}(y(t)) \equiv S_p^x(t) \Psi (S_p^x(t))^T, \quad (18)$$

dengan $S_p^x(t)$ adalah matriks sensitivitas pada (12) dan $\Psi = 2\Gamma^{-1}$ merupakan suatu parameter yang berkaitan dengan *Fisher Information Matrix* (FIM) Γ berikut.

$$\Gamma = \partial R_{ij} / \partial p_k^2. \quad (19)$$

Perlu diperhatikan bahwa FIM $\Psi = 2\Gamma^{-1}$ pada (18) merupakan salah satu ukuran jumlah informasi terkait p yang terkandung dalam data pengukuran $y(t)$. Grafik pada Gbr. 3 ini juga menunjukkan batas 95% *confidence interval* (CI(95%)) hasil estimasi parameter pada setiap data yang digunakan. Nilai interval ini ditentukan sebagai berikut [11]-[13].

$$\text{CI}(95\%) = p^* \pm 1,95 \sqrt{\text{diag}(\Psi)}. \quad (20)$$

Terlihat pada Gbr. 3 bahwa respons dari model dengan parameter optimal yang diperoleh oleh estimator ML dapat menggambarkan dinamika sistem sebagaimana ditunjukkan oleh data pengukuran aktual dari sistem. Hasil simulasi ini menunjukkan bahwa estimator ML yang diusulkan merupakan salah satu metode yang efektif untuk mengestimasi parameter model sistem dinamik berdasarkan data observasi yang tercampur dengan sinyal gangguan acak.

V. KESIMPULAN

Makalah ini telah memaparkan metode dan implementasi estimator ML dalam proses estimasi nilai parameter optimal pada model sistem nonlinear berbentuk persamaan ruang keadaan waktu diskrit. Secara spesifik, parameter optimal didefinisikan sebagai nilai yang meminimalkan selisih antara data keluaran aktual dari sistem dan data keluaran model ketika menggunakan nilai parameter optimal yang diestimasi. Teknik pengoptimalan berbasis gradien yang dikombinasikan dengan teknik analisis sensitivitas diusulkan sebagai metode komputasi untuk penentuan nilai parameter optimal berdasarkan data pengukuran dari sistem yang telah tercampur dengan sinyal gangguan acak. Hasil simulasi numerik yang mengimplementasikan estimator ML yang diusulkan untuk

penentuan parameter optimal pada model *chemostat* mengilustrasikan potensi metode yang diajukan.

REFERENSI

- [1] J.R. Raol, G. Girija, dan J. Singh, *Modelling & Parameter Estimation of Dynamic Systems*, IET Control Engineering Series, Vol. 65, United Kingdom: The Institution of Engineering and Technology, 2004.
- [2] J.V. Beck dan K.J. Arnold, *Parameter Estimation in Engineering and Science*, Wiley Series in Probability & Mathematical Statistics, New York, USA: Wiley, 1977.
- [3] S.D. Silvey, *Statistical Inference*, Baltimore, USA: Penguin Books, 1970.
- [4] D.M. Malakoff, "Bayes Offers 'New' Way to Make Sense of Numbers," *Science*, Vol. 286, hal. 1460-1464, 1999.
- [5] R. Aster dan C. Thurber, *Parameter Estimation & Inverse Problems*, Cambridge, USA: Academic Press, Vol. 90, 2011.
- [6] J.D. Hamilton, *Time Series Analysis (Vol. 2)*, Princeton, USA: Princeton University Press, 1994.
- [7] W.H. Press, *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*, 3rd Ed., New York, USA: Cambridge University Press, 2007.
- [8] M.A. Tanner, *Tools for Statistical Inference: Methods for Exploration of Posterior Distributions and Likelihood Functions*, 2nd Ed., New York, USA: Springer-Verlag, 1993.
- [9] A. Raue, C. Kreutz, T. Maiwald, J. Bachmann, M. Schilling, U. Klingmüller, dan J. Timmer, "Structural & Practical Identifiability Analysis of Partially Observed Dynamical Models by Exploiting the Profile Likelihood," *Bioinformatics*, Vol. 25, No. 15, hal. 1923-1929, 2009.
- [10] S. Hengl, C. Kreutz, J. Timmer, dan T. Maiwald, "Data-Based Identifiability Analysis of Nonlinear Dynamical Models," *Bioinformatics*, Vol. 23, No. 19, hal. 2612-2618, 2007.
- [11] F. Geier, G. Fengos, F. Felizzi, dan D. Iber., "Analyzing and Constraining Signaling Networks: Parameter Estimation for the User," *Computational Modeling of Signaling Networks*, Totowa, NJ, USA: Humana Press, hal. 23-39, 2012.
- [12] K. Jaqaman dan G. Danuser, "Linking Data to Models: Data Regression," *Nature Review Molecular Cellular Biology*, Vol. 7, No. 11, hal. 813-819, 2006.
- [13] B. Efron dan R. Tibshirani, "Bootstrap Methods for Standard Errors, Confidence Intervals and Other Measures of Statistical Accuracy," *Statistical Science*, Vol. 1, No. 1, hal. 54-75, 1986.
- [14] *MATLAB Optimization Toolbox Version 7.2 Release R2015a*, The MathWorks, Inc., 2015.
- [15] G.F. Fussmann, S.P. Ellner, K.W. Shertzer, dan N.G. Hairston, "Crossing the Hopf Bifurcation in a Live Predator-Prey System," *Science*, Vol. 290, hal. 1358 - 1360, 2000.
- [16] K.W. Shertzer, S.P. Ellner, G.F. Fussmann, dan N.G. Hairston, "Predator-Prey Cycles in an Aquatic Microcosm: Testing Hypotheses of Mechanism," *Journal of Animal Ecology*, Vol. 71, hal. 802-815, 2002.