

# Analisis Kinerja MIMO Masif dengan Teknik *Precoding* *Maximum Ratio Transmission*

Rusdha Muharar<sup>1</sup>

**Abstract**—Channel State Information (CSI) at the base stations obtained via the uplink training is an important factor in cellular and multiuser Multi-Input Multi-Output (MIMO) communication networks. In massive MIMO cellular networks with pilot-based training, the most adopted approach is to employ the same set of orthogonal training symbols in each cell. This is called the full-pilot reuse (FPR) scheme. In this paper, we consider the less-common but a more practical approach where each cell uses different sets of orthogonal training symbols and call this scheme as the Different Orthogonal Pilot (DOP) sequences. In particular, we focus on the downlink performance of massive MIMO networks with the Maximum Ratio Transmission (MRT) precoder at the base stations. The analysis is performed in the large system regime where the number of antennas at each base station and the number of users at each cell tend to infinity with a fixed ratio. We obtain a new expression for the Signal to Interference plus Noise Ratio (SINR) in that regime, called the limiting SINR. Numerical simulations show that it can approximate the finite-size systems accurately. Furthermore, the simulations also indicate that the DOP scheme can give a better SINR and a higher user capacity compared to those of the FPR scheme.

**Intisari**—Informasi keadaan kanal atau *Channel State Information* (CSI) pada *Base Station* (BS) yang diperoleh saat pelatihan dalam transmisi *uplink* merupakan faktor penting dalam komunikasi pada jaringan seluler pengguna jamak (*multi-user*) *Multi-Input Multi-Output* (MIMO). Pada jaringan seluler MIMO dengan jumlah antena masif (*massive MIMO*) dan pelatihan berbasis pengiriman simbol pilot, pendekatan yang paling sering diadopsi adalah dengan menggunakan deretan simbol latihan ortogonal yang sama untuk setiap sel. Pendekatan ini dinamakan dengan *Full-Pilot Reuse* (FPR). Pada makalah ini dikaji pendekatan yang jarang digunakan tetapi lebih praktis, yaitu setiap sel menggunakan deretan simbol latihan ortogonal yang berbeda dan disebut sebagai skema *Different Orthogonal Pilot sequences* (DOP). Kajian pada makalah ini berfokus pada transmisi *downlink* dengan teknik *precoding Maximum Ratio Transmission* (MRT) pada BS. Analisis kinerja dilakukan pada dimensi tak-hingga (*large system regime*). Pada dimensi ini, jumlah antena dan jumlah pengguna di setiap sel menuju tak hingga dengan rasio yang tetap. Analisis pada dimensi ini menghasilkan persamaan baru untuk SINR, yang disebut dengan *limiting SINR*. Hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa *limiting SINR* merupakan perkiraan atau pendekatan (*approximation*) yang akurat untuk SINR pada dimensi berhingga. Selain itu, hasil simulasi juga mengindikasikan bahwa

skema DOP dapat menghasilkan SINR dan kapasitas pengguna yang lebih besar dibandingkan dengan skema FPR.

**Kata Kunci**— Komunikasi seluler pengguna jamak, *Massive MIMO*, *Maximum Ratio Transmission*, Analisis Dimensi Tak-Hingga, Kapasitas Pengguna.

## I. PENDAHULUAN

Penggunaan antena jamak pada sisi pengirim dan penerima atau *multi-input multi-output* (MIMO) pada sistem komunikasi nirkabel untuk mendapatkan *spectral efficiency* yang tinggi semakin sering ditemui, baik pada jaringan *Wireless Local-Area Network* (WLAN) seperti pada standar IEEE 802.11n dan IEEE 802.11ac, ataupun pada jaringan seluler seperti 4G *Long-Term Evolution* (LTE). Salah satu faktor penting dalam komunikasi berbasis MIMO adalah tersedianya informasi kondisi kanal atau *Channel State Information* (CSI) pada pengirim dan/atau penerima. Informasi CSI yang dapat dieksploitasi dengan baik dapat meningkatkan kapasitas (laju data) dan reliabilitas sistem komunikasi MIMO. Pada komunikasi MIMO pengguna tunggal (*single-user*), ketersediaan CSI pada sisi pengirim dan penerima akan meningkatkan kapasitas kanal (*channel capacity*) secara linear sesuai dengan nilai minimum antara jumlah antena pada sisi pengirim dan penerima. Untuk sistem komunikasi pengguna jamak (*multi-user*) dengan setiap pengguna mempunyai antena tunggal, ketersediaan CSI akan meningkatkan kapasitas kanal secara linear dengan skala yang sesuai dengan nilai minimum antara jumlah antena pengirim dan jumlah pengguna dalam jaringan. Bila informasi CSI tidak tersedia dan bila setiap pengguna mempunyai jumlah antena dan distribusi *fading* yang sama, maka komunikasi MIMO pengguna jamak tidak memberikan keuntungan apa pun. Dengan kata lain, komunikasi MIMO pengguna tunggal adalah mode komunikasi yang optimal.

Pada tahun 2010, diperkenalkan sebuah konfigurasi MIMO yang dikenal dengan MIMO masif (*massive MIMO*) [1]. Pada konfigurasi ini, *Base Station* (BS) mempunyai antena berukuran kecil dengan jumlah yang masif, yaitu dalam orde ratusan. Makalah tersebut juga menunjukkan bahwa dengan penggunaan antena berjumlah masif, efek *fast-fading* dari kanal nirkabel dan efek derau dari penerima menjadi tidak signifikan atau menghilang. Akibatnya, laju data akan meningkat dan hanya dibatasi oleh sebuah fenomena yang disebut dengan kontaminasi pilot (*pilot contamination*) [1], [2]. Konfigurasi ini berhasil menarik perhatian yang sangat besar di kalangan peneliti komunikasi nirkabel dan juga diusulkan sebagai kandidat lapisan fisik (*physical layer*) untuk standar jaringan 5G [3]-[5]. Lebih jauh lagi, hasil penelitian menunjukkan bahwa bila teknik pengolahan multisel dilakukan secara cerdas dan bila kondisi matriks *covariance* dari kanal (*channel*

<sup>1</sup>Dosen, Jurusan Teknik Elektro dan Komputer, Fakultas Teknik, Universitas Syiah Kuala, Jl. Syech Abdul Rauf no. 7, Darussalam, Banda Aceh, Indonesia, 23111 (telp: 0651-7554336; e-mail: r.muhaarar@unsyiah.ac.id)

*covariance matrix*) pengguna penyebab interferens bersifat independen secara statistik, maka kapasitas kanal akan meningkat tanpa batas [6]. Dengan kata lain, efek kontaminasi pilot tidak lagi menjadi faktor penghalang.

Sama halnya dengan jaringan MIMO konvensional, konfigurasi MIMO masif juga membutuhkan CSI. Informasi ini diperoleh melalui proses pelatihan (*training*) pada transmisi *uplink*. Pada proses ini, para pengguna mengirimkan deretan simbol pilot (*pilot symbols*) kepada BS. Kemudian, BS akan melakukan proses estimasi kanal dari setiap pengguna yang berada di dalam sel tersebut. Hasil estimasi kanal inilah yang merupakan representasi dari CSI. Kebanyakan literatur yang mengkaji jaringan MIMO masif menggunakan skema *Full Pilot Reuse* (FPR) dengan strategi setiap sel menggunakan deretan pilot simbol (bersifat ortogonal) yang sama. Sebagai contoh, skema ini digunakan untuk melakukan analisis kinerja MIMO masif pada transmisi *uplink* dengan filter linear pada sisi penerima [7]. Analisis lebih jauh dengan skema ini untuk transmisi *uplink* dan *downlink* dengan melibatkan pengaruh korelasi kanal dan penggunaan berbagai jenis filter penerima (transmisi *uplink*) dan *precoder* (transmisi *downlink*) terdapat pada [8].

Skema alternatif yang jarang dikaji dalam literatur MIMO masif adalah dengan menggunakan deretan simbol pilot yang berbeda di setiap sel [1], yang disebut pada makalah ini dengan skema DOP. Walaupun skema ini tidak memberikan laju data yang lebih baik dibandingkan dengan skema FPR, skema DOP memberikan kapasitas pengguna yang lebih baik, seperti yang telah ditunjukkan untuk skenario transmisi data *uplink* [9], [10]. Kapasitas pengguna di sini didefinisikan sebagai jumlah pengguna yang dapat dilayani oleh BS sehingga *Quality of Service* (QoS) dalam bentuk *Signal to Interference to Noise Ratio* (SINR) dari setiap pengguna melebihi ambang batas tertentu.

Analisis kinerja untuk jaringan MIMO masif dilakukan dengan mengambil asumsi: jumlah antena pada BS ( $N$ ) menuju tak hingga sedangkan jumlah pengguna ( $K$ ) memiliki nilai yang berhingga. Jadi, beban sel (*cell-loading*), yang didefinisikan dengan rasio  $K/N$ , menuju nilai nol. Asumsi ini merupakan asumsi yang paling sering digunakan dalam analisis kinerja jaringan MIMO masif. Akan tetapi, asumsi ini menghasilkan konvergensi yang lambat, sehingga nilai *asymptotic* yang diperoleh mempunyai akurasi yang kurang baik sebagai perkiraan kinerja sistem pada dimensi berhingga.

Asumsi lain yang lebih umum (*general*) adalah bila nilai  $K$  dan  $N$  secara bersamaan menuju tak hingga, tetapi dengan rasio yang tetap (konstan). Dengan demikian, hasil analisis berlaku untuk sembarang nilai beban sel. Dimensi ini sering juga disebut dengan *large system regime* dan telah digunakan sebelumnya dalam analisis kinerja sistem *Code-Division Multiple Access* (CDMA), sebagai contoh [11]-[13], dan analisis kinerja sistem MIMO pengguna jamak, sebagai contoh [14]-[17], dan referensi di dalamnya. Perangkat matematis yang digunakan dalam analisis tersebut berbasis kepada teori matriks acak berdimensi besar atau *large random matrices* [18]. Aplikasinya dalam bidang komunikasi dirangkum pada [16], [17].

Pada makalah ini, dilakukan analisis kinerja MIMO masif dengan skema DOP pada transmisi *downlink*. Walaupun kapasitas kanal dari transmisi ini dapat dicapai dengan penggunaan *precoder Dirty Paper Coding* (DPC) yang bersifat nonlinear, tetapi kompleksitas implementasi dan beban komputasi *precoder* ini sangat tinggi. Oleh karena itu, *precoder* linear lebih sering digunakan karena mempunyai kompleksitas implementasi yang cukup rendah bila dibandingkan dengan DPC. Beberapa *precoder* linear yang paling sering digunakan dan dikaji adalah *Maximum Ratio Transmission* (MRT), *Zero Forcing* (ZF), dan *Regularized Zero Forcing* (RZF). Pada makalah ini, dikaji kinerja MRT, yang merupakan jenis *precoder* linear paling sederhana. Kajian untuk *precoder* linear yang lebih kompleks merupakan pekerjaan lanjutan pada masa datang (*future works*). Selanjutnya, analisis pada makalah ini dilakukan pada dimensi tak hingga dengan nilai  $K, N \rightarrow \infty$  dan rasio  $K/N$  yang konstan. Penelitian yang sangat terkait dengan pekerjaan pada makalah telah dilakukan [1], [8]. Seperti yang telah dipaparkan, skenario pada penelitian sebelumnya mencakup skema FPR dan DOP [1]. Akan tetapi, analisisnya dilakukan pada dimensi  $N \rightarrow \infty$  dan nilai  $K < \infty$  (berhingga). Dengan kata lain, beban sel  $K/N$  pada dimensi tersebut bernilai nol. Berbeda dengan penelitian tersebut, analisis skema DOP/FPR pada makalah ini dilakukan pada *large system regime*, yaitu: dimensi  $K, N \rightarrow \infty$  dan untuk sembarang nilai beban sel. Oleh karena itu, analisis pada makalah ini merupakan generalisasi dari analisis pada [1]. Terkait dengan [8], analisis kinerja MIMO masif dilakukan pada dimensi yang sama dengan makalah ini, tetapi analisis pada [8] hanya berfokus pada skema FPR. Lebih jauh lagi, makalah ini dan [8] menggunakan perangkat matematis yang berbeda dalam melakukan analisis pada *large system regime*. Teknik analisis pada penelitian tersebut menggunakan metode *deterministic equivalent* [8], sedangkan teknik yang digunakan pada makalah ini bersandar kepada transformasi Stieltjes (*Stieltjes transform*) dari fungsi distribusi nilai *eigen* (*eigenvalue*). Akan tetapi, kedua teknik ini akan memberikan hasil yang ekuivalen.

Kontribusi dari analisis dan simulasi pada makalah ini dapat dirangkum sebagai berikut: (1) ekspresi/formula baru (*novel*) untuk nilai SINR *downlink* pada dimensi *large system regime* dengan menggunakan skema DOP dan teknik *precoding* MRT; (2) simulasi numerik menunjukkan bahwa *limiting* SINR yang dihasilkan dapat mendekati atau memperkirakan nilai SINR pada dimensi berhingga dengan akurasi yang sangat baik; dan (3) dengan mengamati distribusi SINR yang diperoleh dengan menggunakan skema FPR dan DOP, terlihat bahwa skema DOP berpotensi menghasilkan nilai SINR dan kapasitas pengguna yang lebih tinggi dibandingkan skema FPR.

#### A. Struktur Makalah

Makalah ini mempunyai struktur sebagai berikut. Bagian selanjutnya memaparkan model jaringan MIMO masif yang digunakan, termasuk proses *uplink training* dan transmisi data *downlink*. Ekspresi matematis untuk SINR dengan *precoder* MRT juga disajikan pada bagian tersebut. Bagian III mempresentasikan hasil analisis kinerja sistem pada dimensi

tak hingga, baik untuk skema DOP maupun FPR. Validasi hasil analisis dilakukan melalui simulasi numerik yang terdapat pada Bagian IV. Selain itu, kurva distribusi SINR untuk masing-masing skema juga didiskusikan pada bagian ini. Bagian V berisi kesimpulan makalah dan ditutup dengan Bagian Lampiran yang berisi proses pembuktian dari teorema dan lema yang telah dinyatakan sebelumnya pada bagian III.

### B. Notasi

Huruf kapital dan huruf *small case* yang tebal masing-masing digunakan untuk matriks dan vektor. Matriks identitas yang berukuran  $N \times N$  dan vektor kolom berukuran  $N \times 1$  masing-masing dilambangkan dengan  $\mathbf{I}_N$  dan  $\mathbf{0}_N$ . Perhitungan *trace* sebuah matriks menggunakan notasi  $\text{Tr}(\cdot)$ . Selanjutnya, notasi  $\|\cdot\|$  dan  $\mathbb{E}[\cdot]$  masing-masing melambangkan *Euclidean norm* dan operator ekspektasi. Operator konjugat, *transpose*, dan *Hermitian transpose* masing-masing dilambangkan dengan  $(\cdot)^*$ ,  $(\cdot)^\top$ , dan  $(\cdot)^H$ . Sebuah vektor  $\mathbf{x}$  yang mempunyai elemen acak bersifat *Circularly Symmetric Complex Gaussian (CSCG)* dan mempunyai nilai *mean* nol dengan matriks kovarian  $\Sigma$  dilambangkan  $\mathbf{x} \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \Sigma)$ . Kemudian,  $\xrightarrow{a.s.}$  melambangkan *almost sure convergence* pada variabel acak.

## II. MODEL SISTEM

Pada makalah ini dikaji jaringan seluler MIMO masif dengan jumlah sel sebanyak  $L$ . Setiap sel mempunyai sebuah BS dengan antenna sebanyak  $N$  dan melayani  $K$  pengguna. Pada model ini diasumsikan bahwa setiap sel mempunyai jumlah pengguna yang sama. Kasus jumlah pengguna yang berbeda untuk setiap sel dapat dikembangkan dengan mudah dari model ini. Selanjutnya, vektor kanal antara pengguna ke- $k$  pada sel  $i$  ( $\mathbf{UE}_{ki}$ ) dengan BS pada sell  $j$ , yang dinotasikan dengan  $\mathbf{g}_{kij} \in \mathbb{C}^N$ , diberikan oleh

$$\mathbf{g}_{kij} = \sqrt{\ell_{kij}} \mathbf{h}_{kij}$$

dengan  $\mathbf{h}_{kij} \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_N)$  merepresentasikan koefisien kanal *fast-fading* dan  $\ell_{kij}$  merupakan koefisien kanal *slow-fading*. Lebih lanjut, efek *shadowing* pada komponen *slow-fading* diabaikan. Dengan demikian, nilai  $\ell_{kij}$  hanya bergantung pada jarak antara BS  $j$  dan  $\mathbf{UE}_{ki}$ . Protokol komunikasi yang digunakan adalah *Time-Division Duplex (TDD)* dengan asumsi sifat timbal-balik yang sempurna (*perfect channel reciprocity*) antara kanal *uplink* dan *downlink*. Karena fokus dari makalah ini adalah analisis kinerja transmisi *downlink*, maka transmisi pada satu blok *coherence time* dengan panjang durasi/symbol  $T$  dapat dibagi ke dalam dua fase. Fase pertama adalah *uplink training*. Pada fase ini, setiap pengguna pada sebuah sel mengirimkan simbol pilot/latih kepada BS sel tersebut. Jumlah simbol latih yang dikirimkan adalah sebanyak  $\tau$  simbol. Dalam fase ini, BS juga melakukan estimasi kanal untuk setiap pengguna berdasarkan simbol latih yang dikirim oleh setiap pengguna. Kemudian, BS membentuk *precoder* atau matriks *precoding* berdasarkan estimasi kanal setiap pengguna. Perlu dicatat bahwa *precoder* ini akan digunakan oleh BS untuk mengodekan data simbol dari para pengguna pada fase kedua,

yaitu fase transmisi data *downlink*. Pada fase ini, transmisi data berlangsung dengan durasi  $T - \tau$ .

### A. Uplink Training

Pada fase *uplink training*, setiap sel diasumsikan melakukan pelatihan secara tersinkronisasi, yang berarti bahwa setiap sel memulai pelatihan pada waktu dan dengan durasi yang sama. Sebagai catatan, asumsi ini merupakan skenario terburuk karena efek kontaminasi pilot berada pada nilai/titik maksimum. Bila asumsi tersebut tidak digunakan atau proses pelatihan/pengiriman data dilakukan secara tidak sinkron, maka efek ICI dapat diminimalkan atau dihilangkan [1]. Selanjutnya, simbol latih dari pengguna  $k$  pada sel  $i$  pada waktu  $t$  dinotasikan dengan  $q_{ki,t}$ . Dengan demikian, simbol latih untuk pengguna tersebut selama durasi pelatihan dapat dibuat dalam bentuk vektor kolom  $\mathbf{q}_{ki} = [q_{ki,1}, q_{ki,1}, \dots, q_{ki,\tau}]^\top$  yang berdimensi  $\tau$ . Vektor simbol latih antar pengguna dalam satu sel bersifat ortonormal, yaitu:

$$\mathbf{q}_{ki}^H \mathbf{q}_{mi} = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & k \neq m. \end{cases}$$

Perlu dicatat bahwa karena jumlah pengguna adalah  $K$  dan vektor latih bersifat ortonormal, maka durasi atau jumlah simbol latih harus memenuhi syarat  $K \geq \tau$ . Bila syarat ini tidak terpenuhi, maka akan ada dua pengguna atau lebih yang akan menggunakan vektor latih/symbol yang sama. Akibatnya, tidak semua vektor kanal pengguna dapat diestimasi oleh BS saat proses pelatihan. Sebaliknya, bila  $K < \tau$  dan bila setiap pengguna harus mempunyai vektor latih yang berbeda, maka vektor latih antar pengguna tidak lagi bersifat ortonormal dan kasus ini berada di luar cakupan makalah ini. Selanjutnya, jika setiap pengguna mengirimkan simbol latih dengan daya  $q_{ki}$ , maka sinyal yang diterima pada BS untuk  $\tau$  simbol latih adalah

$$\mathbf{Y}_i = \sum_{j=1}^L \sum_{k=1}^K \sqrt{q_{kj}} \mathbf{g}_{kji} \mathbf{q}_{kj}^\top + \mathbf{W}_i$$

dengan  $\mathbf{Y}_i \in \mathbb{C}^{N \times \tau}$ . Elemen  $\mathbf{Y}_i$  pada baris ke- $n$  dan kolom ke- $t$  menyatakan sinyal yang diterima oleh antenna BS ke- $n$  pada waktu  $t$ . Elemen matriks  $\mathbf{W}_i$  berisi derau pada setiap elemen antenna BS selama waktu pelatihan. Lebih jauh lagi, elemen  $\mathbf{W}_i$  berupa bilangan kompleks acak yang independen dan dengan distribusi yang sama, yaitu distribusi Gaussian dengan *mean* nol dan varian atau daya  $\sigma^2$ . Dapat dikatakan bahwa derau pada antenna BS adalah berupa *white noise*.

Tanpa mengurangi keumuman (*generality*) hasil yang diperoleh, fokus diarahkan pada pengguna  $k$  pada sel  $i$ , dengan notasi  $\mathbf{UE}_{ki}$ . Untuk melakukan estimasi kanal  $\mathbf{UE}_{ki}$ , BS terlebih dahulu mengorelasikan matriks observasi  $\mathbf{Y}_i$  dengan vektor latih untuk  $\mathbf{UE}_{ki}$ , yaitu  $\mathbf{q}_{ki}$ , sehingga diperoleh (1).

$$\mathbf{Y}_i \mathbf{q}_{ki}^* = \sqrt{p_{kii}} \mathbf{h}_{kii} + \sum_{j \neq i}^L \sum_{m=1}^K \sqrt{p_{mji}} \mathbf{h}_{mji} \mathbf{q}_{mj}^\top \mathbf{q}_{ki}^* + \mathbf{w}_{ki} \quad (1)$$

dengan  $\mathbf{w}_{ki} = \mathbf{W}_i \mathbf{q}_{ki}^* \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_N)$  dan  $p_{kij} = q_{ki} \ell_{kij}$ . Estimasi vektor kanal  $\mathbf{h}_{kii}$  dengan metode *minimum mean-squared error (MMSE)* menghasilkan (2).

$$\hat{\mathbf{h}}_{kii} = \frac{v_{ki}}{\sqrt{p_{kii}}} \left( \mathbf{h}_{kii} + \sum_{j \neq i}^L \sum_{m=1}^K \frac{\sqrt{p_{mji}}}{\sqrt{p_{kii}}} \mathbf{h}_{mji} \mathbf{q}_{ki}^H \mathbf{q}_{mj} + \frac{\mathbf{w}_{ki}}{\sqrt{p_{kii}}} \right) \quad (2)$$

dengan

$$v_{ki} = \frac{p_{kii}}{p_{kii} + \sum_{j \neq i}^L \sum_{m=1}^K p_{mji} |\mathbf{q}_{ki}^H \mathbf{q}_{mj}|^2 + \sigma^2} \quad (3)$$

Dapat dengan mudah dicek bahwa vektor estimasi kanal  $\hat{\mathbf{h}}_{kii}$  terdistribusi  $\mathcal{CN}(\mathbf{0}, v_{ki} \mathbf{I}_N)$ . Dengan kata lain, setiap elemen dari vektor  $\hat{\mathbf{h}}_{kii}$  mempunyai distribusi yang sama dengan *mean* 0 dan varian  $v_{ki}$ , dan juga independen (secara statistik) satu sama lain. Dengan memanfaatkan sifat metode estimasi MMSE, vektor kanal dapat dimodelkan sebagai (4).

$$\mathbf{h}_{kii} = \hat{\mathbf{h}}_{kii} + \tilde{\mathbf{h}}_{kii} \quad (4)$$

dengan  $\tilde{\mathbf{h}}_{kii}$  adalah vektor kesalahan estimasi kanal (*channel estimation error*) yang mempunyai distribusi  $\mathcal{CN}(\mathbf{0}, \epsilon_{ki} \mathbf{I}_N)$  dengan  $\epsilon_{ki} = 1 - v_{ki}$ . Di sini perlu dicatat bahwa kedua vektor  $\hat{\mathbf{h}}_{kii}$  dan  $\tilde{\mathbf{h}}_{kii}$  adalah independen secara statistik. Fenomena utama dari *uplink training* pada jaringan multisel adalah kontaminasi pilot. Hal ini juga terjadi pada jaringan MIMO masif, baik pada skema FPR maupun DOP. Pada skema DOP, dengan melihat vektor estimasi kanal (2), fenomena kontaminasi pilot dapat dilihat pada suku kedua di dalam tanda kurung (*parentheses*). Suku ini mengandung vektor kanal dan simbol/pilot latih dari semua pengguna sel lain. Pada skema FPR, kontaminasi pilot hanya berasal dari pengguna sel lain yang menggunakan pilot/symbol latih yang sama. Efek kontaminasi pilot ini juga hadir pada varian dari elemen vektor estimasi kanal, yaitu pada suku kedua dari penyebut (3). Implikasinya adalah semakin besar efek atau energi kontaminasi pilot, maka semakin kecil nilai  $v_{ki}$ . Hal ini berarti kualitas vektor estimasi kanal semakin menurun. Perlu dicatat juga bahwa besaran  $v_{ki}$  bersifat acak. Keacakan ini bersumber dari komponen *slow-fading*  $p_{kii}$  dari  $UE_{ki}$  maupun dari komponen *slow-fading* semua pengguna sel lain, yaitu  $p_{mji}$ , untuk semua indeks pengguna  $m$  dan indeks sel  $j \neq i$ . Selain itu keacakan juga bersumber dari simbol/pilot latih  $\mathbf{q}_{ki}$  dan  $\mathbf{q}_{mj}$ . Analisis pada dimensi tak-hingga, yang dilakukan pada Bagian III, akan mengurangi sumber keacakan di atas.

Karakteristik lain dari vektor estimasi kanal adalah korelasi antar hasil estimasi. Pada skema FPR, vektor estimasi kanal dari dua pengguna berbeda dalam satu sel bersifat independen secara statistik. Jadi, korelasi antar vektor estimasi kanal hanya terjadi pada pengguna yang memiliki vektor latih yang sama. Pada skema DOP, korelasi ini terjadi bahkan pada para pengguna dalam sel yang sama. Jika  $\hat{h}_{kii}^{(n)}$  adalah element ke- $n$  dari vektor estimasi kanal  $\hat{\mathbf{h}}_{kii}$ , korelasi antara vektor estimasi kanal dari dua pengguna yang berbeda pada sel  $i$  adalah

$$\mathbb{E} \left[ \hat{h}_{kii}^{(n)} (\hat{h}_{lil}^{(m)})^* \right] = \begin{cases} \rho_{kl,i} & n = m, \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

dengan

$$\rho_{kl,i} = \frac{v_{ki} v_{li}}{\sqrt{p_{kii} p_{lil}}} \mathbf{q}_{ki}^H \left( \sum_{j \neq i}^L \mathbf{Q}_j \mathbf{P}_{ji} \mathbf{Q}_j^H \right) \mathbf{q}_{li}$$

dan  $\mathbf{Q}_j = [\mathbf{q}_{1j}, \mathbf{q}_{2j}, \dots, \mathbf{q}_{Kj}]$ ,  $\mathbf{P}_{ji} = \text{diag}(p_{1ji}, p_{2ji}, \dots, p_{Kji})$ . Pada bagian analisis dimensi tak-hingga ditunjukkan bahwa nilai korelasi ini akan menuju nol. Akibatnya, pada dimensi ini vektor estimasi kanal antar pengguna dalam sel yang sama dapat dianggap independen secara statistik.

### B. Transmisi Data Downlink

Pada fase kedua, BS di setiap sel melakukan transmisi data kepada penggunanya. Antena ke- $n$  dari BS  $i$  mentransmisikan simbol  $x_{ni}$ . Simbol-simbol ini dapat disusun dalam vektor simbol yang dapat dinyatakan dengan  $\mathbf{x}_i = [x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{Ni}]^T$ . Perlu diperhatikan bahwa BS mengirimkan  $N$  simbol untuk setiap slot waktu (*time slot*), sedangkan setiap sel mempunyai  $K$  pengguna. Untuk mengatasi hal ini, BS menggunakan *precoder* untuk setiap pengguna, yang dilambangkan dengan  $\mathbf{f}_{ki}$ . Seperti yang telah dipaparkan di bagian pendahuluan, BS pada setiap sel menggunakan jenis *precoder* linear. Bila data untuk pengguna  $k$  pada sel  $i$  dinotasikan dengan  $d_{ki}$ , maka vektor simbol yang ditransmisikan oleh BS  $i$  dapat ditulis sebagai berikut.

$$\mathbf{x}_i = \sqrt{\xi_i} \sum_{k=1}^K \mathbf{f}_{ki} d_{ki} = \sqrt{\xi_i} \mathbf{F}_i \mathbf{d}_i \quad (5)$$

dengan  $\mathbf{F}_i = [\mathbf{f}_{1i}, \mathbf{f}_{2i}, \dots, \mathbf{f}_{Ki}]^T$  dan  $\mathbf{d}_i = [d_{1i}, \dots, d_{Ki}]^T$  masing-masing adalah matriks *precoding* dan vektor data pengguna untuk sel  $i$ . Perlu dicatat bahwa matriks  $\mathbf{F}_i$  berukuran  $N \times K$ . Dalam kajian ini, BS menggunakan *precoder* linear yang paling sederhana, yaitu MRT. *Precoder* ini bersifat egois (*selfish*) karena *precoder* untuk masing-masing pengguna berusaha memaksimalkan energi dari sinyal/data yang dimaksudkan untuk pengguna yang dimaksud dengan mengabaikan interferens yang diakibatkan bagi pengguna lain. Seperti yang telah dinyatakan sebelumnya, BS hanya mempunyai estimasi dari informasi kanal antara BS dan masing-masing pengguna. Oleh karena itu, BS membentuk *precoder* MRT berdasarkan vektor estimasi kanal dari masing-masing pengguna. Formulasi *precoder* MRT untuk  $UE_{ki}$  adalah

$$\mathbf{f}_{ki} = \hat{\mathbf{h}}_{kii}$$

Dengan demikian, matriks *precoding* untuk para pengguna sel  $i$  adalah  $\mathbf{F}_i = \hat{\mathbf{H}}_i$ . Selanjutnya, data/symbol untuk setiap pengguna diasumsikan diambil dari buku kode (*codebook*) Gaussian dengan daya ternormalisasi  $\mathbb{E}[\|d_{ki}\|^2] = 1$ . Asumsi lain adalah data untuk setiap pengguna dianggap independen secara statistik atau  $\mathbb{E}[d_{ki} d_{mi}^*] = 0$  untuk  $k \neq m$ . Dengan demikian,  $\mathbb{E}[\mathbf{d}_i \mathbf{d}_i^H] = \mathbf{I}_K$ . Konstanta  $\xi_i$  dipilih untuk memenuhi kekangan daya (*power constraint*)  $\mathbb{E}[\|\mathbf{x}_i\|^2] = P_d$ , dengan  $P_d$  adalah total daya pada transmisi *downlink*. Jadi,  $\xi_i$  diberikan oleh (6).

$$\xi_i = \frac{P_d}{\text{Tr}(\mathbf{F}_i \mathbf{F}_i^H)} = \frac{P_d}{\text{Tr}(\hat{\mathbf{H}}_i \hat{\mathbf{H}}_i^H)} \quad (6)$$

Dari transmisi BS  $i$  dan juga interferens dari sel lain, sinyal yang diterima oleh  $UE_{ki}$  adalah (7).

$$r_{ki} = \sqrt{\ell_{kii}} \mathbf{h}_{kii}^T \mathbf{x}_i + \sum_{j \neq i}^L \sqrt{\ell_{kij}} \mathbf{h}_{kij}^T \mathbf{x}_j + z_{ki} \quad (7)$$

dengan  $z_{ki} \sim \mathcal{CN}(0, \sigma^2)$  adalah derau pada penerima UE $_{ki}$ . Dengan menggunakan (5), sinyal (8) dapat ditulis ulang dengan

$$r_{ki} = \sqrt{\xi_i \ell_{kii}} \mathbf{h}_{kii}^T \hat{\mathbf{h}}_{kii} d_{ki} + \sum_{k' \neq k}^K \sqrt{\xi_i \ell_{kii}} \mathbf{h}_{kii}^T \hat{\mathbf{h}}_{k'ii} d_{k'i} \\ + \sum_{j \neq i}^L \sum_{m=1}^K \sqrt{\xi_j \ell_{kij}} \mathbf{h}_{kij}^T \hat{\mathbf{h}}_{mjj} d_{mj} + z_{ki}.$$

Suku pertama di sebelah kanan adalah sinyal yang diperuntukkan atau diinginkan (*desired signal*) untuk UE $_{ki}$ . Suku kedua adalah interferens dari sesama pengguna dalam satu sel atau *Intra-Cell Interference* (ICI). Suku berikutnya adalah interferens dari para pengguna sel lain atau *Other-Cell Interference* (OCI). Untuk keperluan penerimaan yang koheren (*coherent reception*), UE $_{ki}$  dianggap mempunyai informasi yang sempurna untuk  $\sqrt{\xi_i \ell_{kii}} \mathbf{h}_{kii}^T \hat{\mathbf{h}}_{kii}$ . Dengan proses *decoding* pengguna tunggal (*single-user decoding*) dan dengan menganggap interferens sebagai derau, laju ergodik (*ergodic rate*) efektif untuk UE $_{ki}$  adalah

$$R_{ki} = \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) \mathbb{E}[\log_2(1 + \gamma_{ki})] \quad (8)$$

dapat dicapai (*achievable*) dengan

$$\gamma_{ki} = \frac{\xi_i \ell_{kii} |\mathbf{h}_{kii}^H \hat{\mathbf{h}}_{kii}|^2}{\xi_i \ell_{kii} I_{ki} + \sum_{j \neq i}^L \xi_j \ell_{kij} O_{ki,j} + \sigma^2} \quad (9)$$

adalah SINR untuk UE $_{ki}$ . Pada penyebut  $\gamma_{ki}$ , suku  $I_{ki} = \sum_{k' \neq k}^K |\mathbf{h}_{kii}^H \hat{\mathbf{h}}_{k'ii}|^2$  adalah daya ICI yang disebabkan oleh estimasi vektor kanal  $\hat{\mathbf{h}}_{k'ii}$  dan  $O_{ki,j} = \sum_{m=1}^K |\mathbf{h}_{kij}^H \hat{\mathbf{h}}_{mjj}|^2$  merepresentasikan daya OCI yang disebabkan komponen *fast-fading* dari para pengguna sel  $j$ .

Perhitungan laju ergodik (8) pada dimensi sistem berhingga (nilai  $K$  dan  $N$  berhingga) sulit dilakukan. Hal ini dikarenakan keacakan berasal dari dua sumber, yaitu komponen *fast-fading* dan *slow-fading*. Perlu diingat kembali bahwa ekspektasi pada (8) dilakukan terhadap semua komponen dari kedua jenis *fading* tersebut.

Tujuan utama dari makalah ini adalah melakukan perhitungan tersebut pada dimensi sistem menuju tak-hingga (*large system regime*), yaitu  $K, N \rightarrow \infty$  dengan rasio  $K/N$  yang tetap. Analisis pada dimensi ini akan menghilangkan keacakan yang diakibatkan oleh komponen *fast-fading*. Dengan demikian, sumber keacakan pada akhirnya hanya berasal dari komponen *slow-fading*. Perangkat matematis yang digunakan dalam analisis berasal dari teori matriks acak berukuran besar (*large random matrices*). Hasil analisis pada dimensi ini memberikan perkiraan/pendekatan yang akurat untuk SINR (9).

### III. ANALISIS PADA DIMENSI TAK-HINGGA

Analisis sistem pada dimensi tak-hingga melibatkan matriks acak berdimensi besar dan bertumpu pada distribusi nilai *eigen*

(spektrum) dari matriks tersebut. Pada dimensi berhingga, distribusi nilai *eigen* direpresentasikan oleh *empirical spectral distribution* (e.s.d.) dengan definisi berikut [17].

**Definisi 1.** Jika  $\mathbf{X}$  adalah matriks Hermitian yang berukuran  $N \times N$ , maka *empirical spectral distribution* dari  $\mathbf{X}$ , dengan notasi  $F_{\mathbf{X}}$ , adalah

$$F_{\mathbf{X}}(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{1}_{\{\lambda_n \leq x\}}(x)$$

dengan  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$  adalah nilai *eigen* dari matriks  $\mathbf{X}$ . Fungsi indikator  $\mathbf{1}_A(x)$  berlaku untuk himpunan  $A$ , dengan  $\mathbf{1}_A(x) = 1$  jika  $x \in A$  dan  $\mathbf{1}_A(x) = 0$  jika  $x \notin A$ .

Penerapan pertama dari konsep di atas adalah untuk menganalisis varian dari elemen vektor estimasi kanal yang didefinisikan pada (2). Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya,  $v_{ki}$  mengandung suku kontaminasi pilot. Kontaminasi dari sel  $j$  dapat ditulis kembali dengan  $\mathbf{q}_{ki}^H \mathbf{Q}_j \mathbf{P}_{ji} \mathbf{Q}_j^H \mathbf{q}_{ki}$ . Analisis pada dimensi tak-hingga akan mengeksploitasi sifat ortonormal dari vektor penyusun matriks  $\mathbf{Q}_j$  dan e.s.d. dari matriks  $\mathbf{P}_{ji}$ . Dengan asumsi bahwa e.s.d.  $\mathbf{P}_{ji}$  menuju *limiting spectral distribution* (l.s.d) dengan notasi  $F_{\mathbf{P}_{ji}}$  pada dimensi tak-hingga, hasil analisis pada dimensi ini dirangkum oleh Lema berikut.

**Lema 1.** Jika  $F_{\mathbf{P}_{ji}}$  adalah l.s.d. dari  $\mathbf{P}_{ji}$ , maka pada *large system regime*, yaitu  $K, \tau \rightarrow \infty$  dan  $K/\tau \rightarrow \kappa$ ,  $v_{ki} - \bar{v}_{ki} \xrightarrow{a.s.} 0$ , dengan

$$\bar{v}_{ki} = \frac{p_{kii}}{p_{kii} + \kappa \sum_{j \neq i}^L \mathbb{E}[P_{ji}] + \sigma^2} \quad (10)$$

dan  $P_{ji}$  adalah variabel acak dengan fungsi distribusi  $F_{\mathbf{P}_{ji}}$ .

Pembuktian Lema 1 ada pada Lampiran A.

Dari (10) dapat dilihat bahwa nilai  $\bar{v}_{ki}$  dipengaruhi oleh nilai rata-rata interferens  $\mathbb{E}[P_{ji}]$  dari sel lain pada saat proses pelatihan atau *uplink training*. Sangat jelas terlihat bahwa semakin besar nilai rata-rata interferens ini, semakin kecil nilai  $\bar{v}_{ki}$  dan berarti bahwa kualitas estimasi kanal semakin menurun. Hal lain yang dapat diamati dari (10) adalah sumber keacakan hanya berasal dari komponen *slow-fading* UE $_{ki}$ , yaitu  $p_{kii}$ . Keacakan yang disebabkan oleh simbol latih dan komponen *slow-fading* dari pengguna sel lain telah hilang.

Representasi kualitas kanal *asymptotic*  $\bar{v}_{ki}$  (10) mempunyai pengaruh penting terhadap nilai SINR. Hal ini tercermin pada nilai SINR pada dimensi tak-hingga yang merupakan hasil utama dari makalah ini dan dinyatakan pada teorema berikut.

**Teorema 1.** Jika e.s.d. dari matriks  $\mathbf{P}_{ji}$  menuju limit l.s.d.  $F_{\mathbf{P}_{ji}}$  secara hampir pasti (*almost surely*), maka pada dimensi tak-hingga,  $K, N, \tau \rightarrow \infty$  dengan  $K/N \rightarrow \alpha$  dan  $K/\tau \rightarrow \kappa$ ,  $\gamma_{ki} - \bar{\gamma}_{ki} \xrightarrow{a.s.} 0$  dengan  $\bar{\gamma}_{ki}$  adalah *limiting SINR* untuk UE $_{ki}$  yang dinyatakan oleh

$$\bar{\gamma}_{ki} = \frac{\ell_{kii} \bar{v}_{ki}^2}{\alpha_i \bar{v}_i \left( \sum_{j=1}^L \ell_{kij} + \frac{\kappa}{\alpha} \sum_{j \neq i}^L \ell_{kij} p_{kij} \frac{\bar{\psi}_j}{\bar{v}_j} + \frac{\sigma^2}{p_d} \right)} \quad (11)$$

dengan

$$\bar{V}_j = \mathbb{E} \left[ \frac{P_{jj}}{P_{jj} + \kappa \sum_{l \neq j}^L \mathbb{E}[P_{lj}] + \sigma^2} \right] \quad (12)$$

dan

$$\bar{\Psi}_j = \mathbb{E} \left[ \frac{P_{jj}}{(P_{jj} + \kappa \sum_{l \neq j}^L \mathbb{E}[P_{lj}] + \sigma^2)^2} \right]. \quad (13)$$

Pembuktian Teorema 1 ada di Lampiran B.

Berdasarkan hasil tersebut dan dengan menggunakan teorema *dominated convergence* dan teorema pemetaan kontinu (*continous mapping*), maka laju ergodik efektif adalah

$$R_{ki} - \left(1 - \frac{\bar{\tau}}{\bar{T}}\right) \mathbb{E}[\log_2(1 + \bar{\gamma}_{ki})] \xrightarrow{a.s.} 0 \quad (14)$$

dengan  $\bar{\tau} = \tau/K$  dan  $\bar{T} = T/K$ . Ekspektasi pada (14) dilakukan untuk variabel acak  $\ell_{kij}$  (komponen *slow-fading*), untuk  $j = 1, 2, \dots, L$ . Dengan mengamati persamaan untuk  $\bar{\gamma}_{ki}$ , dapat dilihat bahwa kualitas estimasi kanal  $UE_{ki}$  (atau  $\bar{v}_{ki}$ ) yang baik akan meningkatkan daya sinyal yang diinginkan (lihat bagian pembilang  $\bar{\gamma}_{ki}$ ). Akibatnya, nilai *limiting* SINR juga semakin meningkat. Selanjutnya, komponen *slow-fading* untuk  $UE_{ki}$ , yaitu  $\ell_{kii}$ , memengaruhi daya sinyal untuk  $UE_{ki}$  dan juga nilai daya ICI. Dengan melihat pembuktian pada Lampiran B, terutama (15) dan (17), nilai daya ICI *asymptotic* adalah  $P_d \ell_{kii}$ . Jadi,  $\ell_{kii}$  mempunyai pengaruh positif pada kedua komponen SINR di atas. Dengan membagi pembilang dan penyebut (11) dengan  $\ell_{kii}$ , dapat ditarik kesimpulan bahwa semakin besar nilai  $\ell_{kii}$ , maka semakin baik pula nilai SINR. Berbeda dengan daya ICI yang hanya dipengaruhi oleh  $\ell_{kii}$ , komponen daya OCI selain dipengaruhi oleh  $\ell_{kij}$  juga dipengaruhi oleh  $\bar{V}_j$  dan  $\bar{\Psi}_j$ . Secara spesifik, dengan melihat pembuktian di Lampiran B, daya OCI *asymptotic* dapat ditulis sebagai berikut.

$$\sum_{j \neq i}^L \ell_{kij} \left(1 + \frac{\kappa p_{kij} \bar{\Psi}_j}{\alpha \bar{V}_j}\right).$$

Dari persamaan daya OCI tersebut dapat dilihat dengan jelas bahwa  $\ell_{kij}$  (atau  $p_{kij}$ ) mempunyai efek yang negatif terhadap SINR karena nilai  $\ell_{kij}$  atau  $p_{kij}$  yang besar akan meningkatkan daya OCI. Efek yang sama juga dihasilkan dari rasio  $\bar{\Psi}_j/\bar{V}_j$ , yang mempunyai kaitan erat dengan kualitas vektor estimasi kanal dari sel penghasil OCI. Dengan kata lain, kualitas estimasi kanal yang baik pada sel lain (penyumbang interferens) akan menghasilkan efek negatif terhadap para pengguna di sel penerima interferens. Fenomena ini terkait dengan sifat *selfish* dari *precoder* MRT yang digunakan oleh BS di setiap sel.

Faktor lain yang memengaruhi nilai SINR adalah lamanya proses latihan  $\tau$  dan beban sel (*cell-loading*)  $\alpha$ . Dengan melihat nilai  $\kappa = K/\tau$ , dapat diambil kesimpulan bahwa semakin lama proses latihan, yang berimplikasi bahwa nilai  $\tau$  semakin besar, maka nilai  $\kappa$  semakin kecil. Hal ini mengakibatkan nilai SINR semakin baik. Akan tetapi, bila ditinjau dari segi nilai laju ergodik (8) atau (14), nilai  $\tau$  yang besar akan menurunkan laju

ergodik pengguna. Jadi, perubahan nilai  $\tau$  menghasilkan *trade-off* antara nilai SINR dan laju ergodik. Dengan demikian, penentuan nilai optimal untuk  $\tau$  yang memaksimalkan nilai laju ergodik merupakan bahasan lain yang cukup penting. Sedangkan untuk nilai  $\alpha$ , dapat dicek dengan mudah bahwa nilai beban yang sel yang tinggi akan menurunkan nilai SINR. Bila jumlah antena  $N$  dianggap tetap, maka nilai  $\alpha$  yang meningkat selaras dengan jumlah pengguna  $K$  yang semakin besar. Karena jumlah pengguna di setiap sel dianggap sama, maka nilai  $K$  yang semakin besar akan meningkatkan daya ICI dan OCI. Akibatnya, nilai SINR mengalami penurunan.

Suku terakhir pada bagian penyebut (11) adalah inversi dari *Signal to Noise Ratio* (SNR) *downlink*, yang dapat didefinisikan sebagai rasio  $P_d/\sigma^2$ . Dapat dilihat dengan jelas bahwa nilai SNR *downlink* yang tinggi memberikan efek positif kepada nilai SINR.

Sebagai pembandingan kinerja skema DOP, di bawah ini disajikan hasil analisis dimensi tak-hingga untuk FPR dengan *precoder* MRT. Untuk skema FPR, varian dari estimasi kanal untuk  $UE_{ki}$ , dengan notasi  $v_{ki}^s$ , diberikan oleh

$$v_{ki}^s = \frac{p_{kii}}{\sum_{j=1}^L p_{kji} + \sigma^2}$$

Hasil di atas juga ekivalen dengan hasil yang diperoleh pada [8], tetapi dengan menggunakan teknik yang berbeda dalam analisis dimensi tak-hingga. Berbeda dengan (2), efek kontaminasi pilot hanya berasal dari pengguna sel lain yang menggunakan simbol pilot yang sama dengan pengguna  $UE_{ki}$ . Analisis dimensi tak-hingga tidak dapat dilakukan pada  $v_{ki}^s$ , karena suku kontaminasi pilot melibatkan jumlah pengguna (satu pengguna per sel) yang berhingga, yaitu  $L - 1$ . Jadi, sumber keacakan di sini berasal dari  $L$  variabel acak  $p_{kji}$ ,  $j = 1, \dots, L$ . Fakta berbeda ditunjukkan oleh skema DOP karena  $\bar{v}_{ki}$  yang dihasilkan dari analisis dimensi tak-hingga hanya mempunyai satu sumber acak, yaitu  $p_{kii}$ . Selanjutnya, jika  $\mathbf{V}_i^s = \text{diag}(v_{1i}^s, v_{2i}^s, \dots, v_{ki}^s)$  dan  $F_{V_i^s}$  adalah l.s.d. dari  $\mathbf{V}_i^s$ , maka *limiting* SINR pengguna  $UE_{ki}$  dengan skema FPR adalah

$$\bar{\gamma}_{ki}^s = \frac{\ell_{kii} (v_{ki}^s)^2}{\alpha \mathbb{E}[V_i^s] \left( \sum_{j=1}^L \ell_{kij} + \frac{1}{\alpha} \sum_{j \neq i}^L \ell_{kij} \frac{p_{kij} (v_{kj}^s)^2}{p_{kjj} \mathbb{E}[V_j^s]} + \frac{\sigma^2}{P_d} \right)}$$

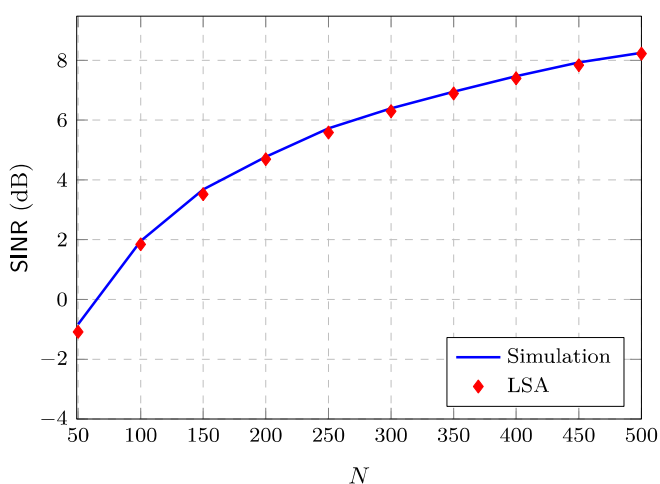
dengan  $V_i^s$  adalah variabel acak dengan fungsi distribusi  $F_{V_i^s}$ . Karena keterbatasan tempat dan teknik pembuktian yang sama dengan (11), maka pembuktian untuk hasil di atas tidak ditampilkan pada makalah ini.

Dapat dilihat bahwa  $\bar{\gamma}_{ki}^s$  memiliki struktur yang mirip dengan (11). Perbedaannya terletak pada komponen yang berhubungan dengan kontaminasi pilot, yaitu  $\bar{\Psi}_j$  pada (11) dan  $(v_{kj}^s)^2/p_{kjj}$  pada  $\bar{\gamma}_{ki}^s$ . Pada skema DOP, efek dari kontaminasi pilot  $\bar{\Psi}_j$  berupa nilai rata-rata  $\bar{v}_{mj}^2/p_{mjj}$  dari semua pengguna di sel  $j$ . Sedangkan pada skema FPR, kontaminasi pilot hanya berasal dari pengguna yang mempunyai simbol/pilot latihan yang sama dengan pengguna  $UE_{ki}$ . Implikasinya adalah pada probabilitas tertentu, SINR yang dihasilkan oleh skema DOP

lebih tinggi dari SINR yang dihasilkan oleh skema FPR. Lebih jauh lagi, karena sumber keacakan pada skema DOP lebih sedikit dibanding dengan skema FPR, maka distribusi SINR dari skema DOP sedikit lebih terjal (*steep*) dibandingkan dengan distribusi SINR dari skema FPR. Akibatnya, walaupun kedua skema menghasilkan SINR rata-rata yang hampir sama, skema DOP berpotensi memberikan kapasitas pengguna yang lebih besar. Hal ini telah dikaji untuk transmisi *uplink* dengan menggunakan *matched filter* pada sisi penerima (BS) [9], [10]. Hal lain yang dapat dilihat dari persamaan untuk  $\bar{\gamma}_{ki}^s$  adalah hilangnya rasio  $\kappa/\alpha$  pada bagian OCI. Jadi, berdasarkan model sistem yang dikaji, variabel  $\tau$  tidak memberikan efek langsung terhadap  $\bar{\gamma}_{ki}^s$ .

#### IV. SIMULASI NUMERIK

Untuk simulasi numerik, model jaringan seluler MIMO masif yang digunakan adalah sebagai berikut. Jaringan mempunyai 7 sel yang berbentuk heksagon. Tanpa mengurangi keumuman hasil, bagian dalam bentuk heksagon ini diasumsikan berbentuk lingkaran dengan radius sel ternormalisasi bernilai 0,9. BS di setiap sel terletak di tengah dan jarak ternormalisasi antar BS adalah 2. *Path-gain* antara pengguna dan BS menggunakan model *bounded distance path-loss*. Bila  $\delta_{kji}$  adalah jarak antara UE $_{ki}$  dengan BS  $i$  dan  $\zeta$  adalah eksponen *path-loss*, maka dengan model *path-loss* tersebut, *path-gain* dinyatakan dengan  $\ell_{kji} = (1 + \delta_{kji}^\zeta)$ . Parameter simulasi yang digunakan adalah  $K = 20$ ,  $\tau = 30$  ( $\kappa = 2/3$ ), dan  $\zeta = 3,7$ . Pada percobaan pertama, antena pada BS berjumlah 50 sampai 500 dengan selang 50. Jumlah vektor kanal yang dibangkitkan adalah 500 dengan magnitude setiap koefisien kanal mempunyai fungsi distribusi Rayleigh. SNR *uplink training* dan transmisi *downlink* masing-masing diatur pada nilai 0 dB dan 10 dB. Gbr. 1 menunjukkan SINR dari salah satu pengguna pada sel yang terdapat di tengah, baik yang didapatkan pada dimensi berhingga (9) maupun pada dimensi tak-hingga (11). Hasil simulasi menunjukkan bahwa *limiting* SINR memberikan pendekatan yang akurat untuk SINR rata-rata pada dimensi berhingga.

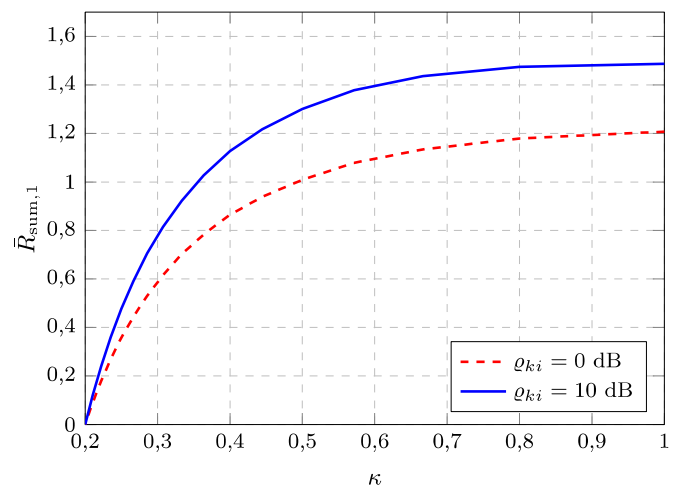


Gbr. 1 SINR rata-rata yang didapatkan analisis pada dimensi berhingga (Simulation) dan *limiting* SINR (LSA).

Pada bagian III telah dipaparkan laju ergodik setiap pengguna sebagai fungsi SINR dan pengaruh parameter pelatihan  $\tau$  atau  $\kappa = K/\tau$  terhadap laju ergodik. Dengan nilai  $K$  yang tetap, Gbr. 2 mengilustrasikan pengaruh nilai  $\tau$  atau  $\kappa = K/\tau$  terhadap laju total ergodik (*ergodic sum rate*) per pengguna pada sebuah sel (sel tengah) yang didefinisikan sebagai berikut.

$$\bar{R}_{\text{sum},i} = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K R_{ki}.$$

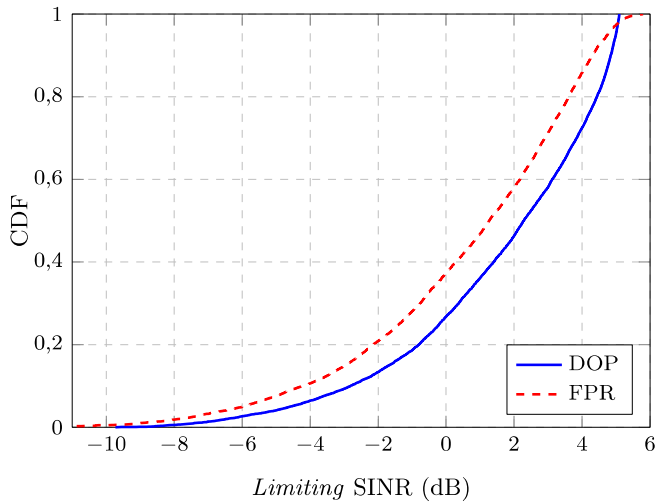
Nilai  $\kappa$  diambil dari 0,2 sampai dengan 1 dengan interval 0,025. Sedangkan nilai daya *uplink training* untuk setiap pengguna dianggap bernilai sama. Pada simulasi numerik untuk Gbr. 2, diambil dua nilai daya *uplink training*, yaitu  $q_{ki} = 0$  dB dan  $q_{ki} = 10$  dB. Untuk kedua nilai daya latihan tersebut, dapat dilihat laju total ergodik per pengguna tertinggi diperoleh saat  $\kappa = 1$  atau  $\tau = K$ . Dengan mengingat kembali kekangan untuk  $\tau$ , yaitu  $\tau \geq K$ , maka jumlah simbol latihan optimal untuk mendapatkan laju total ergodik yang maksimal adalah sebanyak jumlah pengguna  $K$ . Seperti yang telah dipaparkan sebelumnya bahwa terdapat *trade-off* antara nilai  $\tau$  dan laju ergodik, nilai  $\tau$  yang besar akan meningkatkan kualitas informasi CSI, yaitu vektor estimasi kanal, tetapi mengurangi durasi transmisi data *downlink*. Hasil simulasi pada Gbr. 2 mengindikasikan bahwa strategi yang optimal adalah mendapatkan durasi transmisi data *downlink* yang maksimum walaupun kualitas CSI yang didapatkan tidak terlalu bagus. Strategi ini juga telah dibuktikan optimal pada kasus transmisi data *uplink* dengan penerima MMSE untuk komunikasi MIMO pengguna jamak sel tunggal [19]. Pembuktian nilai optimal  $\kappa$  secara teoretis untuk skenario pada makalah ini merupakan pekerjaan lanjutan yang penting untuk dikaji.



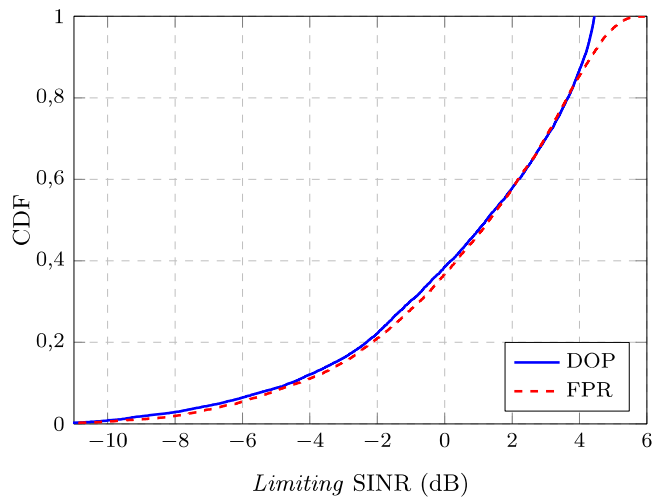
Gbr. 2 Pengaruh nilai  $\kappa$  terhadap laju total ergodik per pengguna pada sel 1 (sel tengah pada konfigurasi jaringan seluler heksagon) dengan nilai daya *uplink training* 0 dB dan 10 dB.

Seperti yang telah dibahas sebelumnya, *limiting* SINR, baik pada skema DOP maupun FPR, bersifat acak dengan sumber keacakan adalah dari komponen *slow-fading*. Gbr. 3 menunjukkan fungsi distribusi kumulatif (CDF) dari *limiting*

SINR untuk kedua skema dengan nilai  $\kappa = 1$ . Dapat dilihat bahwa kedua skema mempunyai fungsi distribusi yang hampir sama. Bila dihitung ekspektasi *limiting* SINR dengan menggunakan fungsi distribusi tersebut, kedua skema akan menghasilkan nilai *limiting* SINR rata-rata yang hampir sama. Dengan demikian, laju ergodik kedua skema juga bernilai hampir sama. Observasi ini sesuai dengan penjelasan pada Bagian III. Hal lain yang dapat diamati adalah fungsi distribusi DOP lebih terjal saat nilai SINR lebih besar dari 4 dB. Bila ambang-batas SINR berada pada nilai ini, maka skema DOP berpotensi menghasilkan kapasitas pengguna yang sedikit lebih besar dibandingkan dengan skema FPR.



Gbr. 3 Distribusi *limiting* SINR untuk skema DOP dan FPR dengan  $\kappa = 1$ .



Gbr. 4 Distribusi *limiting* SINR untuk skema DOP dan FPR dengan  $\kappa = 0,5$ .

Hal lain yang diamati adalah pengaruh nilai  $\kappa$  terhadap distribusi *limiting* SINR. Gbr. 4 adalah fungsi distribusi kedua skema untuk  $\kappa = 0,5$  dengan memperbesar nilai  $\tau$ . Di sini, skema DOP menunjukkan keunggulannya, yaitu memberikan probabilitas SINR yang lebih besar dibandingkan skema FPR. Penyebabnya adalah nilai  $\tau$  tidak memengaruhi nilai *limiting* SINR skema FPR. Hal sebaliknya terjadi pada skema DOP,

yaitu nilai  $\tau$  yang semakin besar akan meningkatkan kualitas estimasi kanal. Akibatnya, nilai *limiting* SINR juga semakin meningkat.

V. KESIMPULAN

Makalah ini memaparkan analisis kinerja transmisi *downlink* dari jaringan seluler MIMO masif dengan menggunakan teknik *precoding* MRT pada BS. Proses *uplink training* menggunakan skema DOP dengan strategi sel mempunyai deretan simbol pilot yang berbeda. Analisis dilakukan pada *large system regime*, yaitu dimensi dengan jumlah antena BS dan jumlah pengguna menuju tak-hingga dengan rasio konstan. Hasil yang diperoleh adalah ekspresi baru untuk *limiting* SINR dari skema DOP. Simulasi numerik menunjukkan bahwa *limiting* SINR merupakan perkiraan yang akurat untuk nilai SINR pada dimensi berhingga. Dengan membandingkan fungsi distribusi dari skema DOP dan FPR, terlihat bahwa skema DOP dapat menghasilkan SINR yang lebih besar dibandingkan skema FPR. Selain itu, pada nilai ambang batas SINR tertentu, skema DOP berpotensi memberikan kapasitas pengguna yang lebih besar.

LAMPIRAN A

Langkah pembuktian Lema 1 berfokus pada suku kedua dari penyebut  $v_{ki}$ . Suku tersebut dapat ditulis dengan

$$\sum_{j \neq i}^L \mathbf{q}_{ki}^H \mathbf{Q}_j \mathbf{P}_{ji} \mathbf{Q}_j^H \mathbf{q}_{ki}$$

Karena  $\mathbf{q}_{ki}$  independen secara statistik dengan  $\mathbf{Q}_j$  untuk indeks  $j \neq i$ , maka [13], [20]

$$\mathbf{q}_{ki}^H \mathbf{Q}_j \mathbf{P}_{ji} \mathbf{Q}_j^H \mathbf{q}_{ki} - \frac{1}{\tau} \text{Tr}(\mathbf{Q}_j \mathbf{P}_{ji} \mathbf{Q}_j^H) \xrightarrow{a.s.} 0.$$

Dengan sifat *trace* dari matriks, yaitu  $\text{Tr}(\mathbf{AB}) = \text{Tr}(\mathbf{BA})$  dan sifat ortonormal matriks  $\mathbf{Q}_j$ , maka suku yang melibatkan *trace* menjadi  $\text{Tr}(\mathbf{P}_{ji})$ . Dengan demikian, saat  $K, \tau \rightarrow \infty$ , nilai  $\frac{1}{\tau} \text{Tr}(\mathbf{P}_{ji}) = \frac{K_j}{\tau} \frac{1}{K_j} \text{Tr}(\mathbf{P}_{ji})$  menuju limit  $\kappa_j \mathbb{E}[P_{ji}]$ , dengan  $P_{ji}$  adalah variabel acak dengan fungsi distribusi  $F_{P_{ji}}$ . Oleh sebab itu,  $v_{ki} - \bar{v}_{ki} \xrightarrow{a.s.} 0$ , dengan  $\bar{v}_{ki}$  didefinisikan oleh (10).

LAMPIRAN B

Langkah-langkah dalam pembuktian Teorema 1 melibatkan perhitungan nilai  $\gamma_{ki}$  pada dimensi tak-hingga. Persamaan (9) dapat ditulis ulang sebagai berikut.

$$\gamma_{ki} = \frac{\check{\xi}_i \ell_{kii} A_{ki}}{\check{\xi}_i \ell_{kii} \check{\gamma}_{ki} + \sum_{j \neq i}^L \check{\xi}_j \ell_{kij} \check{\gamma}_{ki,j} + \sigma^2}$$

dengan

$$\check{\xi}_i = \frac{P_d}{\frac{1}{N^2} \text{Tr}(\hat{\mathbf{H}}_i \hat{\mathbf{H}}_i^H)}$$

$$\check{A}_{ki} = \frac{1}{N^2} |\mathbf{h}_{kii}^H \hat{\mathbf{h}}_{kii}|^2$$



$$\check{I}_{ki} = \frac{1}{N^2} \sum_{k' \neq k}^K |\mathbf{h}_{kii}^H \hat{\mathbf{h}}_{k'ii}|^2$$

$$\check{O}_{ki,j} = \frac{1}{N^2} \sum_{m=1}^K |\mathbf{h}_{kij}^H \hat{\mathbf{h}}_{mjj}|^2$$

Asumsi yang digunakan dalam perhitungan pada dimensi tak-hingga (*asymptotic*) dari masing-masing elemen penyusun SINR  $\gamma_{ki}$  di atas adalah tersedianya l.s.d. dari matriks  $\mathbf{P}_{ij}$  untuk semua nilai  $i$  dan  $j$ .

#### A. Analisis untuk $\check{\xi}_i$

Suku ini dapat ditulis dengan  $\check{\xi}_i = P_d/c_i$ , dengan

$$c_i = \frac{1}{N^2} \text{Tr}(\hat{\mathbf{H}}_i \hat{\mathbf{H}}_i^H) \stackrel{(a)}{=} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^K \frac{1}{N} \hat{\mathbf{h}}_{ki}^H \hat{\mathbf{h}}_{ki}$$

dan (a) diperoleh dengan menggunakan sifat *trace* dari matriks. Berdasarkan Lema 1 pada [11],

$$\frac{1}{N} \hat{\mathbf{h}}_{ki}^H \hat{\mathbf{h}}_{ki} - \frac{v_{ki}}{N} \text{Tr}(\mathbf{I}_N) \xrightarrow{a.s.} 0.$$

Karena  $v_{ki} - \bar{v}_{ki} \xrightarrow{a.s.} 0$  dan  $\text{Tr}(\mathbf{I}_N) = N$ , maka

$$\max_{k \leq K} \left| \frac{1}{N} \hat{\mathbf{h}}_{ki}^H \hat{\mathbf{h}}_{ki} - \bar{v}_{ki} \right| \xrightarrow{a.s.} 0. \quad (15)$$

Dengan menggunakan Lema 2.5 pada [13] dan definisi untuk  $\bar{v}_{ki}$ , maka  $c_i - \alpha \bar{V}_i \xrightarrow{a.s.} 0$ , dengan definisi  $\bar{V}_i$  diberikan oleh (12). Sebagai konsekuensinya,

$$\check{\xi}_i - \frac{P_d}{\alpha \bar{V}_i} \xrightarrow{a.s.} 0. \quad (16)$$

#### B. Analisis untuk $\check{A}_{ki}$

Berdasarkan model kanal (4), yaitu  $\mathbf{h}_{kii} = \hat{\mathbf{h}}_{kii} + \check{\mathbf{h}}_{kii}$ , maka  $\check{A}_{ki}$  dapat ditulis kembali sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \check{A}_{ki} &= \frac{1}{N^2} \|\hat{\mathbf{h}}_{kii}\|^4 + \frac{1}{N^2} |\hat{\mathbf{h}}_{kii}^H \check{\mathbf{h}}_{kii}|^2 \\ &\quad + \frac{2}{N^2} \|\hat{\mathbf{h}}_{kii}\|^2 \Re\{\hat{\mathbf{h}}_{kii}^H \check{\mathbf{h}}_{kii}\}. \end{aligned}$$

Dari (15) diperoleh,

$$\max_{k \leq K} \left| \frac{1}{N^2} \|\hat{\mathbf{h}}_{kii}\|^4 - \bar{v}_{ki}^2 \right| \xrightarrow{a.s.} 0.$$

Dari Lema 1 pada [11] dan dari fakta bahwa  $\hat{\mathbf{h}}_{kii}$  dan  $\check{\mathbf{h}}_{kii}$  independen secara statistik, maka

$$\max_{k \leq K} \left| \frac{1}{N} |\hat{\mathbf{h}}_{kii}^H \check{\mathbf{h}}_{kii}| \right| \xrightarrow{a.s.} 0.$$

Dengan demikian, dapat ditunjukkan dengan mudah bahwa suku kedua dan suku ketiga dari  $A_{ki}$  menuju (limit) nol secara *almost sure*. Jadi,

$$\check{A}_{ki} - \bar{v}_{ki}^2 \xrightarrow{a.s.} 0. \quad (17)$$

#### C. Analisis untuk $\check{I}_{ki}$

Suku ini dapat ditulis kembali sebagai berikut,

$$\check{I}_{ki} = \frac{1}{N} \sum_{k \neq k'}^K \frac{1}{N} |\mathbf{h}_{kii}^H \hat{\mathbf{h}}_{k'ii}|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k \neq k'}^K \frac{1}{N} \mathbf{h}_{kii}^H \hat{\mathbf{h}}_{k'ii} \hat{\mathbf{h}}_{k'ii}^H \mathbf{h}_{kii}.$$

Dari (2), untuk pengguna  $k \neq k'$ , vektor  $\mathbf{h}_{kii}$  dan vektor  $\hat{\mathbf{h}}_{k'ii}$  independen secara statistik. Oleh karena itu,

$$\frac{1}{N} \mathbf{h}_{kii}^H \hat{\mathbf{h}}_{k'ii} \hat{\mathbf{h}}_{k'ii}^H \mathbf{h}_{kii} - \frac{1}{N} \text{Tr}(\hat{\mathbf{h}}_{k'ii} \hat{\mathbf{h}}_{k'ii}^H) \xrightarrow{a.s.} 0.$$

Dengan menggunakan sifat *trace* matriks,  $\frac{1}{N} \text{Tr}(\hat{\mathbf{h}}_{k'ii} \hat{\mathbf{h}}_{k'ii}^H) = \frac{1}{N} \hat{\mathbf{h}}_{k'ii}^H \hat{\mathbf{h}}_{k'ii}$ . Dengan perhitungan yang sama dengan (15), diperoleh

$$\max_{k, k' \leq K} \left| \frac{1}{N} |\mathbf{h}_{kii}^H \hat{\mathbf{h}}_{k'ii}|^2 - \bar{v}_{k'ii} \right| \xrightarrow{a.s.} 0.$$

Dengan Lema 2.5 pada [13] dan definisi untuk  $\bar{v}_{k'ii}$ , diperoleh

$$I_{ki} - \alpha \bar{V}_i \xrightarrow{a.s.} 0. \quad (18)$$

#### D. Analisis untuk $\check{O}_{ki,j}$

Suku ini dapat ditulis ulang sebagai berikut,

$$\check{O}_{ki,j} = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^K \check{O}_{ki,mj}$$

dengan  $\check{O}_{ki,mj} = \frac{1}{N} |\mathbf{h}_{kij}^H \hat{\mathbf{h}}_{mjj}|$ . Dari (2) dapat dilihat bahwa  $\hat{\mathbf{h}}_{mjj}$  pada  $\check{O}_{ki,mj}$  mengandung vektor kanal  $\mathbf{h}_{kij}$ . Untuk dapat mengaplikasikan Lema 1 [11], dilakukan dekomposisi untuk  $\hat{\mathbf{h}}_{mjj}$ , yaitu

$$\hat{\mathbf{h}}_{mjj} = \bar{\mathbf{h}}_{mjj} + v_{mj} \sqrt{\frac{p_{kij}}{p_{mjj}}} \mathbf{h}_{kij} \mathbf{q}_{mj}^H \mathbf{q}_{ki}.$$

Pada dekomposisi di atas, vektor  $\bar{\mathbf{h}}_{mjj}$  tidak mengandung vektor kanal yang berhubungan dengan UE $_{ki}$ , yaitu  $\mathbf{h}_{kij}$ . Jadi, vektor  $\bar{\mathbf{h}}_{mjj}$  dan  $\mathbf{h}_{kij}$  independen secara statistik. Dengan menggunakan model di atas,  $\check{O}_{ki,mj}$  dapat ditulis sebagai berikut

$$\check{O}_{ki,mj} = \check{O}_{ki,mj}^{(1)} + p_{kij} \check{O}_{ki,mj}^{(2)} + 2\sqrt{p_{kij}} \|\mathbf{h}_{kij}\|^2 \Re\{\check{O}_{ki,mj}^{(3)}\}$$

dengan

$$\begin{aligned} \check{O}_{ki,mj}^{(1)} &= \frac{1}{N} |\mathbf{h}_{kij}^H \bar{\mathbf{h}}_{mjj}|^2 \\ \check{O}_{ki,mj}^{(2)} &= \frac{v_{mj}^2}{p_{mjj}} \frac{1}{N} \|\mathbf{h}_{kij}\|^4 |\mathbf{q}_{ki}^H \mathbf{q}_{mj}|^2 \\ \check{O}_{ki,mj}^{(3)} &= \frac{v_{mj}}{p_{mjj}} \left( \frac{1}{N} \mathbf{h}_{kij}^H \bar{\mathbf{h}}_{mjj} \right) (\mathbf{q}_{mj}^H \mathbf{q}_{ki}). \end{aligned}$$

Dari Lema 1 [11], dapat diperoleh bahwa

$$\max_{m \leq K} \left| \check{\delta}_{ki,mj}^{(1)} - \frac{1}{N} \mathbf{h}_{mjj}^H \bar{\mathbf{h}}_{mjj} \right| \xrightarrow{a.s.} 0.$$

Dapat diperiksa bahwa setiap elemen dari vektor  $\bar{\mathbf{h}}_{mjj}$  adalah variable acak kompleks yang terdistribusi sama, yaitu Gaussian dan independen satu sama lain dengan *mean* 0. Dapat ditunjukkan bahwa varian dari setiap elemen  $\bar{\mathbf{h}}_{mjj}$  pada dimensi tak-hingga menuju limit  $\bar{v}_{mj}$ . Dengan demikian,

$$\max_{m \leq K} \left| \check{\delta}_{ki,mj}^{(1)} - \bar{v}_{mj} \right| \xrightarrow{a.s.} 0.$$

Kemudian, dengan melakukan penjumlahan untuk semua indeks  $m$ , diperoleh

$$\frac{1}{N} \sum_{m=1}^K \check{\delta}_{ki,mj}^{(1)} - \alpha \bar{V}_j \xrightarrow{a.s.} 0. \tag{19}$$

Untuk  $\check{\delta}_{ki,mj}^{(2)}$ , dari Lema 1 [11], diperoleh

$$\frac{1}{N^2} \|\mathbf{h}_{kij}\|^4 - 1 \xrightarrow{a.s.} 0$$

dan

$$\max_{m \leq K} \left| \tau |\mathbf{q}_{ki}^H \mathbf{q}_{mj}|^2 - 1 \right| \xrightarrow{a.s.} 0.$$

Maka, dapat ditunjukkan dengan mudah bahwa

$$\max_{m \leq K} \left| \check{\delta}_{ki,mj}^{(2)} - \frac{\kappa \bar{v}_{mjj}^2}{\alpha p_{mjj}} \right| \xrightarrow{a.s.} 0.$$

Dengan menjumlahkan suku  $\check{\delta}_{ki,mj}^{(2)}$  untuk semua nilai  $m$  dan dengan menggunakan definisi untuk  $\bar{v}_{mj}$ , dihasilkan

$$\frac{1}{N} \sum_{m=1}^K \check{\delta}_{ki,mj}^{(2)} - \kappa \bar{\Psi}_j \xrightarrow{a.s.} 0. \tag{20}$$

dengan  $\bar{\Psi}_j$  didefinisikan oleh (13). Beralih ke suku terakhir, yaitu  $\check{\delta}_{ki,mj}^{(3)}$ , penggunaan Lema 1 pada [11] menghasilkan

$$\max_{m \leq K} \left| \frac{1}{N} \mathbf{h}_{kij}^H \bar{\mathbf{h}}_{mjj} \right| \xrightarrow{a.s.} 0 \quad \text{dan} \quad \max_{m \leq K} |\mathbf{q}_{mj}^H \mathbf{q}_{ki}| \xrightarrow{a.s.} 0.$$

Dengan demikian,  $\max_{m \leq K} |\check{\delta}_{ki,mj}^{(3)}| \xrightarrow{a.s.} 0$ . Penjumlahan suku ini untuk semua nilai  $m$  menghasilkan

$$\frac{1}{N} \sum_{m=1}^K \|\mathbf{h}_{kij}\|^2 \check{\delta}_{ki,mj}^{(3)} \xrightarrow{a.s.} 0. \tag{21}$$

Dengan menggabungkan hasil-hasil dari (19), (20), dan (21) diperoleh,

$$\check{\delta}_{ki,j} - (\alpha \bar{V}_j + \kappa p_{kij} \bar{\Psi}_j) \xrightarrow{a.s.} 0. \tag{22}$$

Kemudian, dengan menggabungkan hasil perhitungan pada dimensi tak-hingga untuk setiap suku dari SINR (9), diperoleh nilai *limiting* SINR (11). Dengan demikian, pembuktian Teorema 1 telah lengkap.

REFERENSI

- [1] T.L. Marzetta, "Noncooperative Cellular Wireless with Unlimited Numbers of Base Station Antennas," *IEEE Transactions on Wireless Communications*, Vol. 9, No. 11, hal. 3590-3600, 2010.
- [2] L. Lu, G.Y. Li, A.L. Swindlehurst, A. Ashikhmin, dan R. Zhang, "An Overview of Massive MIMO: Benefits and Challenges," *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, Vol. 8, No. 5, hal. 742-758, Oct. 2014.
- [3] F. Boccardi, R.W. Heath, A. Lozano, T.L. Marzetta, dan P. Popovski, "Five Disruptive Technology Directions for 5G," *IEEE Communications Magazine*, Vol. 52, No. 2, hal. 74-80, Feb. 2014.
- [4] G. Fettweis dan S. Alamouti, "5G: Personal Mobile Internet Beyond What Cellular Did to Telephony," *IEEE Communications Magazine*, Vol. 52, No. 2, hal. 140-145, Feb. 2014.
- [5] C.-X. Wang, F. Haider, X. Gao, X.-H. You, Y. Yang, D. Yuan, H.M. Aggoune, H. Haas, S. Fletcher, dan E. Hepsaydir, "Cellular Architecture and Key Technologies for 5G Wireless Communication Networks," *IEEE Communications Magazine*, Vol. 52, No. 2, hal. 122-130, 2014.
- [6] E. Björnson, J. Hoydis, dan L. Sanguinetti, "Massive MIMO Has Unlimited Capacity," *IEEE Transactions on Wireless Communications*, Vol. 17, No. 1, hal. 574-590, 2018.
- [7] N. Krishnan, R.D. Yates, dan N.B. Mandayam, "Uplink Linear Receivers for Multi-Cell Multiuser MIMO with Pilot Contamination: Large System Analysis," *IEEE Trans. Wireless Commun.*, Vol. 13, No. 8, hal. 4360-4373, 2014.
- [8] J. Hoydis, S. ten Brink, dan M. Debbah, "Massive MIMO in the UL/DL of Cellular Networks: How Many Antennas Do We Need?," *IEEE J. Sel. Areas Commun.*, Vol. 31, No. 2, hal. 160-171, 2013.
- [9] A. Sivamalai dan J.S. Evans, "On Uplink User Capacity for Massive MIMO Cellular Networks," *Proc. IEEE Globecom*, 2016, hal. 1-7.
- [10] R. Muharar dan J. Evans, "Performance Analysis of Massive MIMO Networks with Random Unitary Pilot Matrices," *Proc. IEEE Wireless Communications and Networking Conference (WCNC)*, Barcelona, Spain, 2018, hal. 1-6.
- [11] J. Evans dan D.N.C. Tse, "Large System Performance of Linear Multiuser Receivers in Multipath Fading Channels," *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 46, No. 6, hal. 2059-2078, Sep. 2000.
- [12] D.N.C. Tse dan S.V. Hanly, "Linear Multiuser Receivers: Effective Interference, Effective Bandwidth and User Capacity," *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 45, No. 2, hal. 641-657, Mar. 1999.
- [13] M.J.M. Peacock, "Random Matrix Theory Analysis of Fixed and Adaptive Linear Multiuser Receivers," PhD Thesis, University of Sydney, Sydney, Australia, 2005.
- [14] R. Muharar dan J. Evans, "Downlink Beamforming with Transmit-Side Channel Correlation: A Large System Analysis," *IEEE International Conference on Communications (ICC)*, 2011, hal. 1-5.
- [15] S. Wagner, R. Couillet, M. Debbah, dan D.T.M. Slock, "Large System Analysis of Linear Precoding in Correlated MISO Broadcast Channels Under Limited Feedback," *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 58, No. 7, hal. 4509-4537, Jul. 2012.
- [16] A.M. Tulino dan S. Verdú, "Random Matrix Theory and Wireless Communications," dalam *Foundations and Trends in Communications and Information Theory*, Vol. 1, No. 1, Boston, USA: Now Publishers Inc., 2004, hal. 1-182.
- [17] R. Couillet dan M. Debbah, *Random Matrix Methods for Wireless Communications*, Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2011.
- [18] Z.D. Bai dan J.W. Silverstein, *Spectral Analysis of Large Dimensional Random Matrices*, Berlin, Germany: Springer, 2010.
- [19] R. Muharar dan J. Evans, "Optimal Training for Time-Division Duplexed Systems with Transmit Beamforming," *Australian Communications Theory Workshop (AusCTW)*, 2011, hal. 158-163.
- [20] M. Debbah, W. Hachem, P. Loubaton, dan M. de Courville, "MMSE Analysis of Certain Large Isometric Random Precoded Systems," *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 49, No. 5, 1293-1311, 2003.