VOLUME 11 No. 2, 22 Juni 2022 Halaman 101-111

PROSES DIFUSI RELATIVISTIK MELALUI PERSAMAAN LANGEVIN DAN FOKKER-PLANCK

RELATIVISTIC DIFFUSION PROCESS THROUGH LANGEVIN AND FOKKER-PLANCK EQUATION

Arista Romadani*
Fakultas Sains dan Teknologi, UIN Maulana Malik Ibrahim Malang

Muhammad Farchani Rosyid
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Gadjah Mada

Submitted:15-01-2021; Revised:21-11-2021; Accepted:24-11-2021

ABSTRACT
Brownian motion theory is always challenging how to describe diffusion phenomena with the main issue is how to extend the classical theory of Brownian motion to the special relativity framework. In this study, we formulated dynamics and distribution of a Brownian particle in relativistic framework by using Langevin and Fokker-Planck equation. By representing Brownian particle dynamics by Langevin equation, the velocity curves were dependent on the presence of viscous friction coefficient (heat bath), and were used generalized in special relativity theory, A relativistic Langevin equation reduces to the classical theory at low velocities. Likewise, the distribution of Brownian particles is represented as a stationary solution of the relativistic Fokker-Planck equation. From numerical results, we found that the probability density in the relativistic Fokker-Planck equation for was reduced to the standard Fokker-Planck equation in Netownian classical theory. For the calculation result showed that the Hanggi-Klimontovich approach has a consistent result to the relativistic Maxwell distribution. This work could open a promising interpretation to formulate the diffusion phenomena into general relativity theory.

Keywords: ***Brownian; relativity; Langevin; Fokker-Planck; diffusion.***

ABSTRAK
Teori gerak Brown selalu memberikan tantangan bagaimana untuk menjelaskan fenomena difusi dengan tren saat ini yaitu memperluas teori klasik gerak Brown ke dalam tinjauan relativitas khusus. Dalam penelitian ini, kita memformulasikan dinamika dan distribusi dari sebuah partikel Brown dalam tinjauan relativistik menggunakan persamaan Langevin dan Fokker-Planck. Perumusan dinamika dari partikel Brown direpresentasikan oleh persamaan Langevin menghasil kurva kecepatan yang bergantung pada keberadaan dari koefisien gesek (kekentalan medium), dan perumusan tersebut diperluas ke dalam teori relativitas khusus. Untuk kecepatan rendah, persamaan Langevin relativistik tereduksi kembali ke teori klasik. Sementara itu, distribusi dari partikel Brown diwakili oleh rapat peluang sebagai solusi stasioner persamaan Fokker-Planck relativistik. Dari hasil numerik, kita mendapatkan bahwa rapat peluang dalam persamaan Fokker-Planck relativistik untuk tereduksi ke persamaan Fokker-Planck biasa dalam teori klasik Newtonian. Untuk hasil perhitungan menunjukkan bahwa pendekatan

* Corresponding author: arista.romadani@uin-malang.ac.id

Hanggi-Klimontovich memiliki hasil yang konsisten dengan distribusi Maxwell relativistik. Penelitian ini dapat membuka interpretasi fisis yang diharapkan untuk merumuskan fenomena difusi ke dalam teori relativitas umum.

Kata kunci: ***Brownian; relativitas; Langevin; Fokker-Planck; difusi.***

PENGANTAR

Teori gerak Brown, lebih dari seratus tahun telah memberikan sumbangan yang sangat penting terhadap pemahaman kita tentang berbagai fenomena mikroskopis yang terjadi. Mula - mula diusulkan sebagai metode pendekatan untuk interaksi materi pada skala atomik, teori gerak Brown kemudian berkembang dengan pesat dan meluas ke arah penelitian pada bidang - bidang yang lain, ditunjukkan dengan adanya peningkatan jumlah terapan dalam bidang biologi, kimia, ekonomi, dan fisika. Tahun 1828 seorang ahli botani dari Skotlandia, Robert Brown mengamati butiran serbuk dalam suatu cairan yang menunjukkan adanya gerakan tak beraturan. Gerakan itu kemudian dapat dijelaskan sebagai tumbukan-tumbukan acak dengan molekul-molekul pada cairan tersebut. Untuk menjelaskan gerak tersebut secara matematik orang dapat menggunakan konsep stokastik (Jacka & Oksendal, 1987; Pitman & Yor, 2018).

Gerak Brown klasik atau teori difusi takrelativistik, secara berurutan dikembangkan oleh Albert Einstein dan Marian Von Smoluchowski (Dunkel & Hänggi, 2008a). Relativitas khusus telah terbukti menjadi kerangka yang tepat untuk menggambarkan proses fisis pada semua kasus terestrial. Masalah gerak Brown memainkan peran penting pada pembuktian awal teori kinetik dengan memperkirakan bilangan Avogadro atas dasar teori yang dikemukakan Einstein (Perrin, 1909).

Salah satu jenis proses difusi yang penting di dalam fisika yaitu perumusan dinamika partikel yang berdifusi di dalam fluida yang memiliki hambatan karena viskositas dan disertai gaya stokastik akibat gerakan acak molekul-molekul fluida yang bertumbukan dengan partikel tersebut (Pal & Deffner, 2020). Proses difusi ini dikenal sebagai proses Ornstein-Uhlenbeck (Uhlenbeck & Ornstein, 1930). Proses difusi merupakan contoh khusus proses Markov dengan contoh fungsi yang kontinyu menggambarkan teori model peluang fenomena difusi fisika. Contoh sederhana yaitu gerak partikel yang sangat kecil seperti serbuk tepung dalam fluida yang disebut sebagai gerak Brown (Whittle & Arnold, 1976).

Penelitian secara teoritis tentang teori gerak Brown dan proses stokastik membuat terobosan yang memperkenalkan dan menunjukkan berbagai jenis integral stokastik yang dikenal dengan persamaan diferensial stokastik (Itô, 1944;1951). Persamaan diferensial stokastik merupakan suatu cara yang mudah untuk memodelkan dinamika dari partikel relativistik dalam lingkungan secara acak (Persamaan langevin). Persamaan differensial stokatik juga menjelaskan proses Markov dalam ruang fase satu partikel relativistik (Dunkel & Hänggi, 2009).

Pendekatan Langevin untuk gerak Brown jauh lebih sederhana dari pada pendekatan Einstein yang berangkat melalui hipotesis, kemudian menurunkan dan menyelesaikan sebuah persamaan diferensial (persamaan Fokker-Planck) yang mengatur evolusi waktu dari rapat peluang sebuah partikel Brown. Sementara Langevin menggunakan hukum dua Newton untuk merepresentasikan partikel Brown menjadi suatu persamaan yang sekarang dikenal sebagai persamaan Langevin (Langevin, 1908). Persamaan Langevin dan persamaan Fokker-Planck keduanya menjelaskan persamaan fisika yang bersifat kontinyu, proses Markov. Bahkan mereka menggunakan metode masing-masing untuk mendapatkan hasil yang sama.

Meskipun demikian, analisis Langevin tentang gerak Brown sedikit lebih umum dan benar dari pada analisis Einstein. Secara khusus, Langevin memperkenalkan konsep stokastik suatu partikel Brown di dalam ruang kecepatan, sementara Einstein menyelesaikan sepenuhnya dalam ruang konfigurasi (Lemons & Gythiel, 1997).

Proses difusi relativistik diperkenalkan melalui proses Ornstein-Uhlenbeck relativistik dimana noise (ketidakteraturan) didefinisikan pada kerangka diam fluida tempat terjadinya difusi. Proses ini tidak hanya model yang mungkin sangat mudah dipahami, tetapi juga model yang paling mudah dari fenomena relativistik takberaturan (Debbasch, Mallick & Rivet, 1997). Penjelasan secara matematik tentang proses stokastik telah mendorong pendekatan- pendekatan baru khususnya dalam bidang fisika energi tinggi dan astrofisika. Penggabungan teori relativitas dan konsep stokastik menarik minat yang cukup besar selama beberapa dasawarsa, terutama pada pengembangannya dalam wilayah relativistik (Dunkel & Hänggi, 2005a). Oleh karena itu akan dipaparkan kembali beberapa pendekatan terkait penjelasan proses difusi yang telah ada, kemudian akan dibangun dalam kerangka ralativitas khusus untuk kasus (1+3)-dimensi.

Model lain proses difusi untuk kasus relativistik tanpa meninjau media tempat terjadinya difusi, sehingga secara fisis tidak dapat ditafsirkan sebagai proses difusi partikel tehadap fluida tempat terjadinya proses difusi (Franchi & Le Jan, 2007). Sementara model lain yang relevan untuk menggambarkan dinamika reltivistik dari partikel yang berdifusi adalah dengan mempertimbangkan gerak partikel dari kerangka acuan media difusinya (Dunkel & Hänggi, 2009; Debbasch, 2006).

Dinamika dan evolusi dari suatu partikel Brown secara umum biasanya dijelaskan dari persamaan Langevin dan persamaan Fokker-Planck. Perumusan tersebut merupakan teori yang mapan untuk menggambarkan gerak Brown dalam kerangka relativitas khusus. Formulasi gerak Brown pada kasus (1+3)-dimensi merupakan perumuman dari formulasi untuk kasus (1+1)-dimensi. Persamaan Langevin relativistik tidak unik untuk menghasilkan persamaan Fokker-Planck yang sesuai, hal ini dikarenakan persamaan Langevin relativistik pada koordinat pengamat menunjukkan perkalian antara fungsi koordinat momentum dan proses *Gaussian white noise*. Terdapat tiga analisa mengenai aturan diskritisasi untuk penyelesaian persamaan Langevin dengan perkalian *Gaussian white noise* yang diusulkan oleh Itô, Fisk dan Stratonovich, dan Hänggi dan Klimontovich (Dunkel & Hänggi, 2005a; 2005b). Penelitian ini memiliki tujuan untuk mendapatkan perumusan dinamika partikel difusi dalam tinjauan relativistik menggunakan persamaan Langevin dan Fokker-Planck serta distribusi peluang partikel difusi secara matematis dan numerik.

METODE

Penelitian ini dibangun secara teoretis dengan mengonstruksi fenomena difusi dalam teori gerak Brown dalam tinjauan teori relativitas khusus. Dalam penelitian ini, berangkat dari fenomena difusi klasik kemudian dibangun fenomena difusi dalam tinjauan teori relativitas khusus. Pertama, perumusan dinamika partikel difusi dirumuskan dengan persamaan Langevin. Kedua, distribusi partikel ditinjau dengan menggunakan persamaan Fokker-Planck. Ketiga, solusi stasioner rapat peluang diselesaikan dengan pendekatan Ito, Stratonovich-Fisk, dan Hanggi-Klimontovich. Terakhir, hasil numerik disajikan untuk memberikan interpretasi fisis terkait dinamika dan distribusi peluang dari sebuah partikel difusi.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Proses Difusi

Proses difusi (gerak Brown, proses Wiener) merupakan kasus khusus dari proses Markov dengan fungsi kontinyu yang berperan sebagai model teoritis peluang dari fenomena difusi fisis. Contoh yang paling sederhana yaitu gerak partikel - partikel yang sangat kecil dari butiran serbuk dalam cairan, yang disebut sebagai gerak Brown (Whittle & Arnold, 1976). Proses Wiener merupakan sebuah model matematis yang menunjukkan representasi dari fenomena gerak Brown dalam proses difusi.

Ditinjau sejumlah partikel yang dilarutkan dalam fluida dengan kerapatan partikel di titik $\vec{r}$ pada saat t diberikan sebagai $f\,(t,\vec{r})$. Sistem tersebut memenuhi persamaan kontinuitas dan dari persamaan tersebut kemudian diperoleh persamaan yang dikenal sebagai persamaan difusi. Pengamatan menunjukkan bahwa ketika terjadi suspensi (gerak molekul – molekul yang dilarutkan), butiran-butiran serbuk kecil bergerak secara tidak teratur dalam suatu fluida. Fenomena ini secara sistematis pertama kali diamati oleh Robert Brown yang kemudian dikenal sebagai fenomena gerak Brown. Sebagai seorang ahli botani, Robert Brown mengamati dalam beberapa eksperimen untuk mengetahui apakah gerak tersebut merupakan wujud dari suatu kehidupan. Gerak Brown dapat diartikan sebagai gerakan acak partikel mikroskopis yang terlarut di dalam fluida. Dalam pengamatan yang telah dilakukan, Robert Brown mendapatkan kesimpulan yaitu, (1) lintasan gerak partikel-partikelnya dalam suatu fluida sangat tidak teratur dan (2) gerakan akibat interaksi antara dua partikel yang berlainan tidak saling memengaruhi.

Persamaan langevin

Partikel Brown bermassa dilarutkan dalam fuida akan bergerak secara acak diamati oleh Paul Langevin. Pendekatan Langevin dengan persamaan diferensial stokastik menggambarkan tentang dinamika suatu partikel. Persamaan Langevin untuk kasus 3-dimensi ialah (Romadani, 2013)

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(t) \qquad (1)$$

$$m\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = -\alpha m\vec{v}(t) + b\vec{L}(t) \qquad (2)$$

dengan adalah koefisien gesek fluida, adalah gaya Langevin (*Gaussian white noise*), dan adalah koefisien yang mengatur amplitudo *noise* (Kampen, 2007)*Quantum Optics (Springer, Berlin 1991.* Dalam proses difusi, gaya Langevin didefinisikan melalui proses Wiener sebagai

$$\vec{L}(t) = \frac{d\vec{W}}{dt} \qquad (3)$$

dengan $\vec{p}(t)$ maka $m\vec{v}(t)$ persamaan (1) dapat ditulis menjadi

$$d\vec{p}(t) = -\alpha\vec{p}(t)dt + bd\vec{W}(t) \qquad (4)$$

dengan $b = \sqrt{2D}$maka

$$d\vec{p}(t) = -\alpha\vec{p}(t)dt + \sqrt{2D}d\vec{W}(t) \qquad (5)$$

untuk sembarang fungsi yang memenuhi persamaan (5) sehingga diperoleh

$$\frac{\partial f\,(t,\vec{p}(t))}{\partial t} = \left(\frac{-\alpha\vec{p}(t)dt + \sqrt{2D}d\vec{W}(t)}{dt}\right)e^{\alpha t} + \alpha\vec{p}(t)e^{\alpha t} \qquad (6)$$

sehingga menjadi bentuk yang lebih sederhana

$$df\big(t,\vec{p}(t)\big) = \sqrt{2D}e^{\alpha t}d\overrightarrow{W}(t) \qquad (7)$$

dengan solusinya adalah

$$\vec{p}(t) = \vec{p}(0)e^{-\alpha t} + \sqrt{2D}e^{-\alpha t}\int_0^t e^{-\alpha t}\,d\overrightarrow{W}(t) \qquad (8)$$

Persamaan Fokker-Planck

Persamaan Fokker-Planck merupakan persamaan diferensial parsial yang menggambarkan evolusi suatu fungsi rapat peluang dari proses stokastik. Persamaan diferensial pada proses Wiener yang memenuhi persamaan diferential parsial parabolik disebut sebagai persamaan Fokker-Planck. Persamaan Fokker-Planck 3-dimensi didefinisikan sebagai

$$\frac{\partial f(t,\vec{r})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial\vec{r}}[A(t,\vec{r})f(t,\vec{r})] = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}[B(t,\vec{r})f(t,\vec{r})] \qquad (9)$$

dengan $f(t,\vec{r})$ merupakan rapat peluang dari suatu partikel. Untuk $f(t,\vec{r})$ rapat peluang partikel menyerupai proses Wiener, yaitu

$$f(t,\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{r^2}{2t}} \quad \text{....(10)}$$

maka diperoleh suatu persamaan yang dikenal sebagai persamaan difusi

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t,\vec{r}) = \frac{\Delta}{2}\frac{\partial^2}{\partial r^2} f(t,\vec{r}). \quad \text{....(11)}$$

persamaan (11) dapat dinyatakan dalam koordinat kartesian di $\mathbb{R}^3$.

Persamaan Langevin Relativistik

Diketahui partikel Brown memiliki massa *m*, waktu pribadi τ, dan vektor-4 kecepatan $u^\beta(\tau)$ dengan kata lain momentum dari partikel tersebut

$$p^\alpha = m u^\alpha \quad \text{....(12)}$$

dengan $u_\alpha u^\alpha = -c^2$ dimana α= 0, 1, 2, 3. Diasumsikan bahwa partikel dibatasi untuk uida yang isotropik dan homogen dengan kecepatan konstan U^β serta tidak ada gaya luar yang bekerja. Diperoleh persamaan Langevin relativistik

$$dx^\alpha(\tau) = \frac{p^\alpha(\tau)}{m} d\tau \quad \text{....(13)}$$

$$dp^\alpha(\tau) = -\nu^\alpha_\beta\left(p^\beta(\tau) - mU^\beta\right)d\tau + w^\alpha(\tau) \quad \text{....(14)}$$

dengan tensor gesekan v^α_β sebagai

$$\nu^\alpha_\beta = \nu\left(\eta^\alpha_\beta + \frac{u^\alpha u_\beta}{c^2}\right) \quad \text{....(15)}$$

dan *v* adalah koefisien gesek skalar fuida diukur pada kerangka diam partikel. Pada kerangka yang bergerak bersama partikel berlaku u^α = (c,0) sehingga

$$\nu^\alpha_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu \end{pmatrix} \quad \text{....(16)}$$

dengan asumsi bahwa $w^\alpha(\tau) = dW^\alpha(\tau) = \sqrt{2D}w$ pada kasus (1+1)-dimensi.

Rapat kebolehjadian dari sebuah partikel difusi relativistik didefinisikan sebagai berikut

$$P^{1+3}\left(w^\alpha(\tau)\right) = \frac{c}{(4\pi D d\tau)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{w_\alpha(\tau)w^\alpha(\tau)}{4Dd\tau}\right) \times \delta\left(u_\alpha w^\alpha(\tau)\right) \quad \text{....(17)}$$

dengan u_α = (-c, 0) adalah vektor kecepatan-(1+3) kovarian dan adalah parameter skalar noise. δ-Dirac muncul karena di koordinat-0 tidak ada gaya stokastik yang bekerja. Persamaan (17) dinormalisasi berlaku

$$1 = \left(\prod_{\alpha=0}^{3}\int_{-\infty}^{\infty} dw^\alpha(\tau)\right) P^{1+3}\left(w^\alpha(\tau)\right) \quad \text{....(18)}$$

diperoleh definisi

$$\langle w(\tau)\rangle = 0 \quad \text{....(19)}$$

$$\langle w^\alpha(\tau) w^\beta(\tau')\rangle = \begin{cases} 0 \ (\text{jika } \tau \neq \tau') \\ D^{\alpha\beta} d\tau \ (\text{jika } \tau = \tau') \end{cases} \quad \text{....(20)}$$

dengan

$$D^{\alpha\beta} = 2D\left(\eta^{\alpha\beta} + \frac{u^\alpha u^\beta}{c^2}\right). \quad \text{....(21)}$$

Pada kerangka diam fluida dimana $U^\alpha=(c,0)$, $U^\alpha = \gamma(c, v^i)$ dan $w^\alpha = (w^0, w^i)$, Bentuk persamaan Langevin pada persamaan (13) dan (14) menjadi

$$dp^i = -\nu p^i dt + w^i \quad \text{....(22)}$$

$$dE = -\nu p^i v_i dt + c w^0 \quad \text{....(23)}$$

dengan energi relativistik $E = cp^0$ dan skalar Lorentz

$$\gamma = \left(1 - \frac{v_i v^i}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(1 + \frac{p_i p^i}{m^2 c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{.......(24)}$$

untuk $u_\alpha = \gamma(-c, v_i)$ dan $w_\alpha = (-w_0, w_i)$ dan maka persamaan (17) menjadi

$$P^{1+3}(w^\alpha(t)) = c\left(\frac{\gamma}{4\pi D dt}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{(w^i)^2 - (w^0)^2}{4D\frac{dt}{\gamma}}\right) \times \delta(c\gamma w^0 - \gamma v_i w^i). \quad \text{....(25)}$$

Gerak Brown relativistik secara lengkap dijelaskan oleh persamaan Langevin pada persamaan (22) dan (23) dengan w^i ditentukan oleh distribusi $P^3(w^i)$dengan definisi

$$P^3(w^i) = \int_{-\infty}^{\infty} dw^0\, P^{1+3}(w^\alpha) \quad \text{................(26)}$$

dengan mensubstitusikan persamaan (25) ke (26) diperoleh

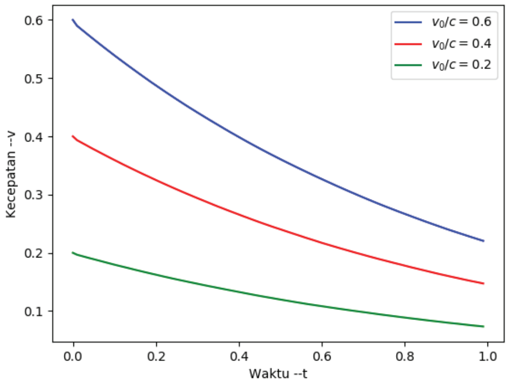
$$P^3(w^i) = c\int_{-\infty}^{\infty} dw^0 \left(\frac{\gamma}{4\pi D dt}\right)^{\frac{3}{2}} \times \exp\left(-\frac{w_i w^i - (w^0)^2}{4D\frac{dt}{\gamma}}\right)\delta\left(c\gamma w^0 - \gamma v_i w^i\right) \quad \text{...........(27)}$$

jika $x = c\gamma w^0$ dan mengikuti definisi integral δ-Dirac maka diperoleh

$$P^3(w^i) = \frac{\gamma^{\frac{1}{2}}}{(4\pi D dt)^{\frac{3}{2}}} \times \exp\left\{-\frac{\gamma}{4Ddt}\left(\delta_{ij} - \frac{v_i v_j}{c^2}\right) w^i w^j\right\} \quad \text{.............(28)}$$

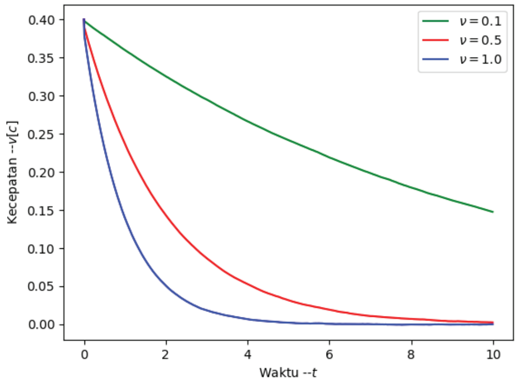
persamaan di atas merupakan distribusi peluang suatu partikel Brown mengikuti persamaan Langevin relativistik.

Dari persamaan (14) dengan asumsi bahwa $c = m = v = 1$ dan $v_0 = 0.4c$ dengan selang interval tertentu maka diperoleh Gambar 1 yang menjelaskan dinamika difusi dari sebuah partikel difusi baik tinjauan klasik maupun relativistik. Pada Gambar 1 menampilkan perbandingan kurva kecepatan sebuah partikel difusi dengan relativistik melalui persamaan Langevin. Gambar 1 menunjukkan bahwa sebuah partikel relativistik dengan kecepatan v^0/c=<<1 memiliki kurva kecepatan mendekati hasil klasik, sementara pola kurva kecepatan baik klasik maupun relativistik memiliki pola yang sama yaitu fungsi eksponensial.



Gambar 1.
Hasil kurva kecepatan dari sebuah partikel Brown dalam tinjauan relativistik
(Sumber: *Plotting* menggunakan Phyton)

Gambar 2 menunjukkan bagaimana sebuah partikel berdifusi bergantung pada gesekan antara partikel dan fluida (media difusi). Kurva kecepatan dari persamaan Langevin divariasikan untuk nilai koefisien gesek berbeda v . Dari Gambar 2, kita dapatkan bahwa semakin besar nilai v maka diperoleh penurunan nilai kecepatan partikel difusi pada waktu tertentu. Hasil tersebut memiliki perilaku yang sama dengan difusi pada tinjauan klasik dan pada Gambar 2 juga menunjukkan bahwa semakin kecil nilai v maka bentuk fungsi eksponensial semakin melandai.



Gambar 2.
Hasil kurva kecepatan relativistik dengan variasi koefisien gesek
(Sumber: *Plotting* menggunakan Phyton)

Persamaan Fokker-Planck Relativistik

Persamaan Fokker-Planck dapat dituliskan sebagai persamaan kontinuitas yaitu (Hänggi & Thomas, 1982)

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t,p) + \frac{\partial}{\partial p^i} j^i(t,p) \quad (29)$$

dengan $f(t,p)$ adalah rapat peluang dan $j^i(t,p)$ arus probabilitas. Solusi stasioner persamaan (29) diperoleh dengan syarat $j^i(p)=0$ yaitu (Jüttner, 1911)

$$f(p) = K\gamma^{\alpha} \exp(-\chi\gamma) \quad (30)$$

K adalah konstanta dan γ adalah faktor Lorentz dalam teori relativitas khusus

$$\gamma = \left(1 - \frac{v_i v^i}{c^2}\right)^{-1/2} = \left(1 + \frac{p_i p^i}{m^2 c^2}\right)^{1/2} \quad (31)$$

dari persamaan (31) didapatkan relasi yaitu:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial p^j} = \frac{p_j}{\gamma m^2 c^2} \quad (32)$$

dan

$$\frac{\partial f}{\partial p^j} = \frac{-p_j}{\gamma m^2 c^2}\left(\frac{\alpha}{\gamma} + \chi\right) f \quad (33)$$

untuk menentukan nilai α dan x pada persamaan (30) dilakukan dengan tiga pendekatan yang diusulkan oleh Ito, Stratonovich-Fisk dan Hanggi Klimontovich.

Pendekatan Ito

Pendekatan ini dengan mengevaluasi Gaussian white noise $L(p)$ pada persamaan Langevin di batas awal selang interval $[t, t + dt]$ (Dunkel & Hänggi, 2005)

$$L(p)^{-1} = L(p(t))^{-1} \quad (34)$$

dengan definisi arus probabilitas pendekatan Ito untuk kasus stasioner memenuhi relasi berikut:

$$j_I^i(t,p) = 0$$

sehingga diperoleh relasi berikut

$$\left[\nu p^i f + D \frac{\partial}{\partial p^j}(A^{-1})^{ij} f\right] = 0 \quad (35)$$

diketahui relasi bahwa:

$$\frac{\partial}{\partial p^j}(A^{-1})^{ij} = \frac{\partial}{\partial p^j}\left[\left(\delta^{ij} + \frac{p^i p^j}{m^2 c^2}\right)\frac{1}{\gamma}\right] = \frac{3p^i}{\gamma m^2 c^2} \quad (36)$$

sehingga dari persamaan (32) dan (33), maka persamaan (35) menjadi

$$p^i f\left[\nu + \frac{3D}{\gamma m^2 c^2} - \frac{D}{m^2 c^2}\left(\frac{\alpha}{\gamma} + \chi\right)\right] = 0 \quad (37)$$

di mana nilai α = 3 dan $x = \nu m^2 c^2/D$ memenuhi persamaan di atas sehingga solusi persamaan (37) untuk kasus stasioner menjadi

$$f_I(p) = K\gamma^3 \, exp\left(-\frac{\nu\gamma m^2 c^2}{D}\right) \quad (38)$$

Rapat peluang dalam representasi kecepatan secara umum diperoleh dengan definisi sebagai berikut

$$\phi(v) = \left|\frac{\partial p}{\partial v}\right| f\big(p(v)\big) \quad \text{....................................(39)}$$

dengan

$$\frac{\partial p}{\partial v} = m^3 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-5/2} \quad \text{...............................(40)}$$

sehingga dari persamaan (39) dan (40) diperoleh rapat peluang yaitu

$$\phi_I(v) = Km^3\gamma^8\, exp\left(-\frac{\nu\gamma m^2c^2}{D}\right) \quad \text{........(41)}$$

Pendekatan Stratonovich-Fisk

Pada pendekatan ini dengan mengevaluasi nilai *L(p)* pada titik tengah interval yang memenuhi (Dunkel & Hänggi, 2005)

$$L(p)^{-1} = L\left(\frac{p(t) + p(t + dt)}{2}\right)^{-1} \quad \text{.........(42)}$$

dengan definisi arus probabilitas pendekatan Stratonovich-Fisk untuk kasus stasioner memenuhi

$$j_{SF}^{i}(t, p) = 0 \quad \text{...(43)}$$

sehingga diperoleh relasi berikut

$$-p^i f\left[v + \frac{3D}{2\gamma m^2c^2} - \frac{D}{m^2c^2}\left(\frac{\alpha}{\gamma} + \chi\right)\right] = 0 \quad \text{...(44)}$$

dengan nilai α=*3/2* dan *x=vm²c²/d* memenuhi persamaan (44) sehingga diperoleh rapat peluang untuk kasus stasioner yaitu

$$f_{SF}(p) = K\gamma^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{\nu\gamma m^2c^2}{D}\right) \quad \text{............(45)}$$

dengan rapat peluangnya yaitu

$$\phi_{SF}(v) = Km^3\gamma^{\frac{13}{2}} \exp\left(-\frac{\nu\gamma m^2c^2}{D}\right). \quad \text{...(46)}$$

Pendekatan Hanggi-Klimontovich

Pendekatan ini mengevaluasi nilai *L(p)* pada titik akhir batas interval $[t, t + dt]$ yang memenuhi (Dunkel & Hänggi, 2005)

$$L(p)^{-1} = L(p(t + dt))^{-1} \quad \text{.......................(47)}$$

dengan definisi arus probabilitas pendekatan Hanggi-Klimontovich untuk kasus stasioner memenuhi

$$j_{HK}^{i}(t, p) = 0 \quad \text{..(48)}$$

sehingga diperoleh relasi berikut

$$p^i f\left[v - \frac{D}{m^2c^2}\left(\frac{\alpha}{\gamma} + \chi\right)\right] = 0 \quad \text{..................(49)}$$

dengan nilai α=0 dan *x= vm²c²/D* memenuhi persamaan (49) sehingga diperoleh rapat peluang untuk kasus stasioner yaitu

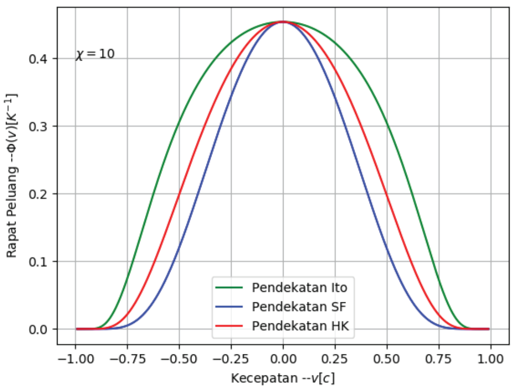
$$f(p) = K_{HG} \exp\left(-\frac{\nu\gamma m^2c^2}{D}\right) \quad \text{................(50)}$$

dengan rapat peluangnya yaitu

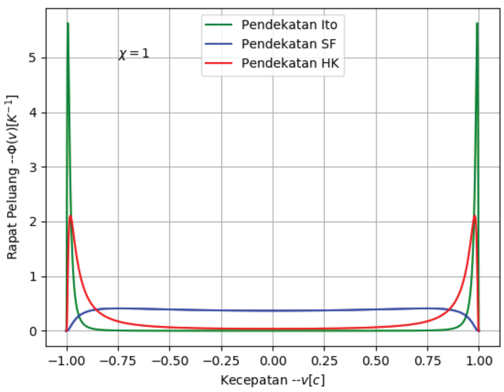
$$\phi_{HK}(v) = Km^3\gamma^5 \exp\left(-\frac{\nu\gamma m^2c^2}{D}\right). \quad \text{.........(51)}$$

Dari persamaan (41), (46) dan (51), fungsi rapat peluang $\phi(v)$ diplot melalui persamaan Fokker-Planck untuk kasus stasioner. Gambar 3 dan 4 menunjukkan rapat peluang $\phi(v)$ terhadap kecepatan *v(c)* untuk nilai parameter x berbeda dengan pendekatan Ito, Stratonovich-Fisk, dan Hanggi-Klimontovich dimana x=vm²c²/D. Untuk nilai parameter x yang besar yaitu x=10, fungsi rapat peluang pada Gambar 3 memiliki pola distribusi Gaussian atau dengan kata lain $mc^2 >> k_BT$ yang bermakna bahwa nilai temperaturnya kecil, dan untuk kecepatan yang semakin tinggi maka rapat peluangnya menurun secara eksponensial. Sebaliknya, untuk nilai parameter x yang kecil yaitu x ≤ 1, fungsi rapat peluang pada Gambar 4 menyimpang dari pola distribusi

Gaussian di mana $mc^2 << k_B T$ atau dengan kata lain pada saat temperaturnya tinggi. Hasil ini mengkonfirmasi bahwa untuk nilai x besar (temperatur rendah) fungsi distribusi pada fenomena difusi relativistik sesuai dengan fenomena difusi pada tinjauan teori klasik. Untuk nilai x kecil (pada temparatur tinggi), fungsi distribusi dengan pendekatan Hanggi-Klimontovich pada persamaan (51) memiliki kesesuaian dengan hasil distibusi Maxwell relativistik (Tsekov, 2010).



Gambar 3.
Solusi stasioner persamaan Fokker-Planck dengan pendekatan Ito, Stratonovich-Fisk, Hanggi-Klimontovich untuk
(Sumber: *Plotting* menggunakan Phyton)



Gambar 4.
Solusi stasioner persamaan Fokker-Planck dengan pendekatan Ito, Stratonovich-Fisk, Hanggi-Klimontovich untuk
(Sumber: *Plotting* menggunakan Phyton)

SIMPULAN

Pada penelitian ini berhasil mengonstruksi perumusan fenomena difusi dari gerak Brown dalam kerangka teori relativitas khusus yang disebut sebagai proses difusi relativistik. Perumusan persamaan Langevin relativistik dari sebuah partikel dengan kecepatan sangat rendah memiliki hasil mendekati hasil klasik dan kecepatannya sangat bergantung pada koefisien gesek terhadap mediumnya. Solusi persamaan Fokker-Planck stasioner diselesaikan dengan pendekatan Ito, Stratonovich-Fisk, dan Hanggi-Klimontovich. Pada batasan Newtonian, fungsi rapat peluang untuk nilai besar tereduksi menjadi teori gerak Brown standar dan untuk nilai kecil pada pendekatan Hanggi-Klimontovich memiliki hasil yang sama dengan distribusi Maxwell pada batasan relativistik .

Implikasi dari hasil penelitian ini adalah mengkonfirmasi bahwa pendekatan Hanggi-Klimontovich merupakan interpretasi yang tepat untuk memberikan deskripsi fisis. Untuk pengembangan selanjutnya, penelitian ini dapat dikembangkan dan diperluas dalam ranah teori relativitas umum untuk menjelaskan fenomena difusi pada ruang waktu melengkung seperti lubang hitam.

UCAPAN TERIMAKASIH

Penulis dengan penuh syukur dan bangga menyampaikan penghargaan dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya atas dukungan segala pihak atas terselenggaranya penelitian ini khususnya Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

DAFTAR PUSTAKA

[1] S. D. Jacka and B. Oksendal, “Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications,” *Journal of the American Statistical Association*, 1987, doi: 10.2307/2288814.

[2] J. Pitman and M. Yor, “A guide to Brownian motion and related stochastic processes,” *arXiv: Probability*, 2018. arXiv:1802.09679

[3] J. Perrin, “Mouvement brownien et molécules,” *Journal of Physics: Theories and Applications*, 1910, 9 (1), pp.5-39. ff10.1051/jphystap:0191000900500ff. ffjpa-00241577f

[4] P. S. Pal and S. Deffner, “Stochastic thermodynamics of relativistic Brownian motion,” *New Journal of Physics 22 073054*, 2020, https://doi.org/10.1088/1367-2630/ab9ce6

[5] G. E. Uhlenbeck and L. S. Ornstein, “On the theory of the Brownian motion,” *Physical Review Journal*, vol. 36, no. 5, pp. 823–841, 1930, doi: 10.1103/PhysRev.36.823.

[6] P. Whittle and L. Arnold, “Stochastic Differential Equations: Theory and Applications,” *Journal of the Royal Statistical Society Series A (Statistics in Society)*, vol. 139, no. 3, p. 409, 1976, doi: 10.2307/2344856.

[7] K. Itô, “Stochastic integral,” *Proceedings of the Imperial Academy*, vol. 20, no. 8, pp. 519–524, 1944, doi: 10.3792/pia/1195572786.

[8] K. Itô, “Multiple wiener integral,” *Journal of the Mathematical Society of Japan*, vol. 3, no. 1, pp. 157–169, 1951, doi: 10.2969/jmsj/00310157.

[9] J. Dunkel and P. Hänggi, “Relativistic Brownian motion,” *Physics Reports*, vol. 471, no. 1. pp. 1–73, 2009, doi: 10.1016/j.physrep.2008.12.001.

[10] P. Langevin, “Sur la theorie du mouvement brownien”, *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences*, 1908.

[11] D. S. Lemons and A. Gythiel, “ Paul Langevin’s 1908 paper ‘On the Theory of Brownian Motion’ [‘Sur la théorie du mouvement brownien,’ C. R. Acad. Sci. (Paris) 146 , 530–533 (1908)] ,” *American Journal of Physics*, 1997, doi: 10.1119/1.18725.

[12] F. Debbasch, K. Mallick, and J. P. Rivet, “Relativistic Ornstein-Uhlenbeck process,” *Journal of Statistical Physics*, vol. 88, no. 3–4, pp. 945–966, 1997, doi: 10.1023/b:joss.0000015180.16261.53.

[13] J. Dunkel and P. Hänggi, “Theory of relativistic Brownian motion: The (1+3)-dimensional case,” *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, Biological, and Soft Matter Physics*, vol. 72, no. 3, 2005, doi: 10.1103/PhysRevE.72.036106.

[14] J. Franchi and Y. Le Jan, “Relativistic diffusions and schwarzschild geometry,” *Communications on Pure and Applied Mathematics* vol. 60, no. 2, pp. 187–251, 2007, doi: 10.1002/cpa.20140.

[15] F. Debbasch, “Relativistic stochastic processes: A review,” *AIP Conference Proceedings* 861, 488 (2006); https://doi.org/10.1063/1.2399614

[16] J. Dunkel and P. Hänggi, “Theory of relativistic Brownian motion: The (1 + 1)-dimensional case,” *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, Biological, and Soft Matter Physics* vol. 71, no. 1, 2005, doi: 10.1103/PhysRevE.71.016124.

[17] A. Romadani, “Proses Difusi Relativistik Pada Kasus (1+3)-Dimensi,” UGM, 2013.

[18] V. N. G. Kampen, *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*. 2007. Elsevier Science

[19] P. Hänggi and H. Thomas, “Stochastic processes: Time evolution, symmetries and linear response,” *Physical Reports* pp. 207–319, 1982, https://doi.org/10.1016/0370-1573(82)90045-X

[20] F. Jüttner, “Das Maxwellsche Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung in der Relativtheorie,” *Annals of Physics Journal* vol. 339, no. 5, pp. 856–882, 1911, doi: 10.1002/andp.19113390503.

[21] R. Tsekov, "Brownian motion of molecules: the classical theory," *Annual University of Sofia Faculty of Chemistry* vol. 88, no. 1, 2010, arXiv:1005.1490v3 [Statistical Mechanics]