

**ANALISIS MODEL PENYEBARAN PENYAKIT SEIQR:
STUDI KASUS COVID-19
(ANALYSIS OF THE SEIQR DISEASE SPREAD MODEL: A
CASE STUDY OF COVID-19)**

ARIMA TRISMININGSIH, NANANG SUSYANTO, NOORMA YULIA MEGAWATI

Abstract. Model $SEIQR$ is a general mathematical model that can be used as an accommodation for many mathematical models constrained to a population. The $SEIQR$ model can be applied in various fields, for example, in the case of the COVID-19 pandemic, which is one example of a real-world problem that uses a mathematical model with classes S , E , I , Q , and R . In this thesis, the $SEIQR$ model and its application with several parameters are studied. Furthermore, the equilibrium points of disease-free and endemic are sought, local stability analysis is performed at each equilibrium point, and applied to the COVID-19 problem by conducting numerical simulations. In the case study, the application of the $SEIQR$ model and numerical simulations is carried out to show the number of individuals still infected, understand the effect of vaccination on the infected outbreak, and determine the number of individuals in the infected subpopulation in the case of COVID-19.

Keywords: $SEIQR$ model, COVID-19, Vaccination, Infected Subpopulation.

Abstrak. Model *SEIQR* merupakan model matematika secara *general* sehingga dapat digunakan sebagai akomodasi untuk banyak model matematika yang dibatasi pada suatu populasi. Model *SEIQR* dapat diaplikasikan di berbagai bidang misal di khusus pandemi COVID-19 yang merupakan salah satu contoh masalah dunia nyata yang menggunakan model matematika dengan kelas *S, E, I, Q,* dan *R*. Pada tesis ini, dikaji model *SEIQR* dan penerapannya dengan beberapa parameter. Selanjutnya mencari titik ekuilibrium bebas penyakit dan endemik, dilakukan analisis kestabilan lokal pada masing-masing titik ekuilibrium, serta mengaplikasikan pada masalah Covid-19 dengan melakukan simulasi numerik. Pada studi kasus dilakukan aplikasi model *SEIQR* dan simulasi numerik untuk menunjukkan jumlah individu yang masih terinfeksi, mengetahui pengaruh vaksin terhadap wabah terinfeksi, dan mengetahui jumlah individu pada subpopulasi terinfeksi dalam kasus Covid-19.

Kata-kata kunci: Model *SEIQR*, COVID-19, vaksinasi, subpopulasi terinfeksi.

1. PENDAHULUAN

Model kompartemen adalah pendekatan dasar untuk menggambarkan penularan penyakit menular melalui pemodelan matematis [19][10]. populasi dibagi menjadi tiga kompartemen: kompartemen yang rentan (*Susceptible*), diberi label *S*, yaitu kelas semua individu yang rentan terhadap penyakit; kompartemen yang terinfeksi (*Infective*), diberi label *I*, yang merupakan kelas semua individu terinfeksi oleh penyakit dan dapat menularkan penyakit tersebut; dan kompartemen sembuh (*Recovery*), diberi label *R*, yaitu kelas semua individu yang telah sembuh dari infeksi. Model tersebut biasa disebut model *SIR*, terdapat juga model *SI*, model *SEIR* yang memiliki kelas penyakit yang laten *E*. Jumlah kelas tergantung pada jenis penyakitnya. Selanjutnya, dalam pengembangan model matematika tersebut, penulis menambahkan kelas yang di karantina *Q*, yaitu model *SEIQR*[10] [12].

Kermack dan McKendrick pertama kali mengusulkan model *SIR*, sejak itu mengalami berbagai perkembangan dan variasi, termasuk parameter variabel seperti tingkat reproduksi dasar (*r*) dan tingkat penghapusan (α) yang konstan sepanjang waktu. Dalam situasi nyata, parameter dapat berubah seiring waktu. Variasi selanjutnya yaitu inklusi faktor-faktor eksternal, seperti vaksinasi atau perilaku manusia. Model *SIR* dengan penundaan mempertimbangkan penyakit dengan masa inkubasi di mana individu yang terinfeksi belum menunjukkan gejala. Model *SIR* telah diterapkan pada berbagai penyakit menular, termasuk influenza, HIV/AIDS, dan banyak lagi [12]. Selain itu, ada model *SI*, yang mencakup kelas rentan dan terinfeksi, serta model *SEIR*, yang mencakup kelas rentan *S*, laten *E*, terinfeksi *I*, dan sembuh *R* [12].

Model *SEIQR* menggambarkan masalah nyata dalam suatu populasi dengan membagi individu ke dalam lima kompartemen: kelas rentan, kelas terpapar, kelas terinfeksi, kelas terisolasi (*Q*), dan kelas sembuh. Model ini merupakan model secara *general* sehingga dapat digunakan sebagai akomodasi untuk banyak model matematika yang dibatasi pada suatu populasi. Model *SEIQR* dapat diterapkan pada kasus pandemi COVID-19 yang merupakan salah satu contoh masalah dunia nyata yang menggunakan model matematika dengan kelas *S, E, I, Q,* dan *R* [6]. Model ini dibuat dengan

parameter tambahan vaksinasi [4]. Berdasarkan uraian yang telah dijelaskan, akan dilakukan analisis model $SEIQR$ dengan studi kasus pada COVID-19. Setelah membahas model $SEIQR$, akan dicari titik ekuilibrium, dan dilakukan analisis kestabilannya, dilakukan analisis sensitivitas dari bilangan reproduksi dasar, serta mengaplikasikan model $SEIQR$ dan melakukan simulasi numerik pada kasus Covid-19.

2. MODEL SEIQR

Bagian ini menjelaskan tentang formulasi model $SEIQR$. Dalam model ini, N merupakan total populasi dengan $S(t)$ menyatakan ukuran subpopulasi yang rentan, $E(t)$ menyatakan ukuran subpopulasi yang terpapar. $I(t)$ menyatakan ukuran subpopulasi yang terinfeksi. $Q(t)$ menyatakan ukuran subpopulasi yang terisolasi dan $R(t)$ menyatakan ukuran subpopulasi yang sembuh. $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$, $Q(t)$, dan $R(t)$ menyatakan jumlah individu pada masing-masing subpopulasi pada saat t , $S(t)+E(t)+I(t)+Q(t)+R(t)=N$. Untuk penyebaran penyakit dalam populasi manusia, sebelumnya terdapat model SIR , SI , SIS , dan model $SEIR$, dengan ditambahkan kompartemen karantina Q , total populasi N dibagi dalam 5 subpopulasi. Parameter yang digunakan dalam pemodelan didefinisikan sebagai berikut.

TABEL 1. Parameter Model $SEIQR$ terhadap Penyakit

Parameter	Notasi
Jumlah rekrutmen	Λ
Laju kematian alami	μ
Laju penularan/ laju kontak yang terinfeksi laten	β_1
Laju penularan/ laju kontak yang terinfeksi	β_2
Laju populasi terpapar	γ
Laju perpindahan yang di karantina kembali rentan	φ
Laju perpindahan yang terinfeksi laten menjadi terdeteksi	η
Laju perpindahan yang terinfeksi menjadi terdeteksi	ϕ
Laju perpindahan yang di karantina menjadi pulih	τ
Laju kesembuhan (<i>recovered rate</i>)	α
Laju kematian akibat terinfeksi penyakit	δ
Laju perpindahan yang pulih kembali rentan	ρ
Laju vaksinasi	ξ

Asumsi pemodelan terhadap penyakit dibuat sebagai berikut:

- (1) Total populasi tidak konstan (dapat berubah).
- (2) Terdapat masa inkubasi untuk penyakit (periode antara terjadinya infeksi dan munculnya gejala).
- (3) Penyakit fatal dapat menyebabkan kematian.
- (4) Populasi kelas yang sembuh tidak mempunyai kekebalan (*immune*) terhadap penyakit (bisa menjadi rentan lagi)

- (5) Terjadi kematian alami yaitu kematian yang bukan disebabkan karena penyakit yang besarnya konstan terhadap waktu dan terjadi pada setiap kelas.
- (6) Terdapat kelahiran dan imigrasi masuk ke dalam kelompok manusia rentan S .
- (7) Laju kontak/ laju penularan yang terinfeksi laten lebih besar dari laju kontak yang terinfeksi ($\beta_1 \geq \beta_2$), karena populasi kelas yang terinfeksi laten belum tampak gejala dan belum dapat identifikasi medis, sedangkan populasi kelas yang terinfeksi sudah tampak gejala dan telah di identifikasi medis.
- (8) Populasi kelas yang terpapar menjadi terinfeksi ada upaya untuk di karantina.
- (9) Populasi kelas yang dikarantina dapat sembuh dan kembali ke kelas rentan.
- (10) Populasi kelas yang terinfeksi dapat sembuh sendiri.
- (11) Populasi kelas yang terdeteksi di rawat dan dipindahkan ke kelas yang pulih.
- (12) Populasi rentan yang divaksinasi akan mempunyai kekebalan.

Berdasarkan asumsi dan nilai parameter, diagram transfer model penyebaran penyakit sebagai berikut:

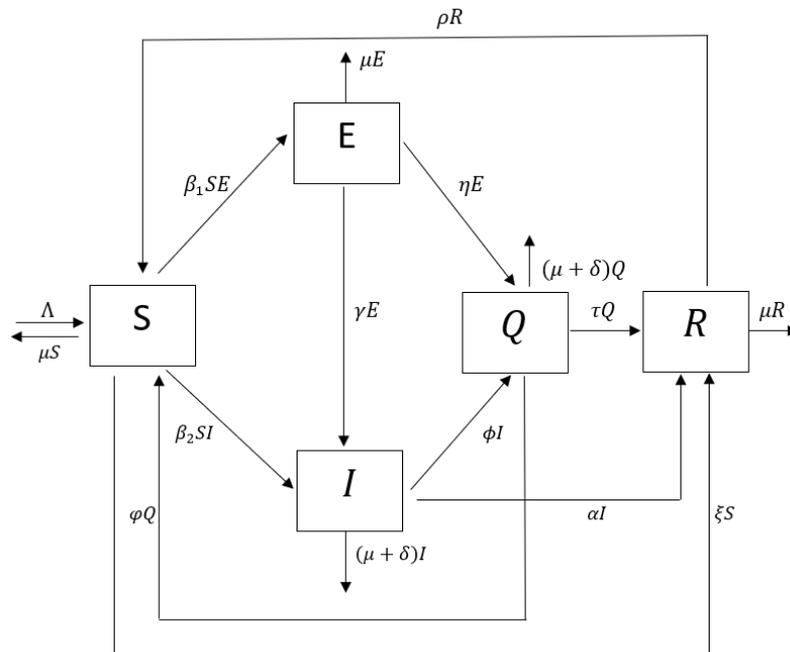


FIGURE 1. Diagram Transfer $SEIQR$

Model diagram transfer yang mewakili model $SEIQR$ dari diagram tersebut adalah.

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= \Lambda + \rho R + \varphi Q - \beta_1 SE - \beta_2 SI - \mu S - \xi S \\
\frac{dE}{dt} &= \beta_1 SE - \mu E - \gamma E - \eta E \\
\frac{dI}{dt} &= \beta_2 SI + \gamma E - (\mu + \delta)I - \phi I - \alpha I \\
\frac{dQ}{dt} &= \eta E + \phi I - \varphi Q - (\mu + \delta)Q - \tau Q \\
\frac{dR}{dt} &= \tau Q + \alpha I - \rho R - \mu R + \xi S.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Dengan asumsi populasi awal adalah $S(0) \geq 0$, $E(0) \geq 0$, $I(0) \geq 0$, $Q(0) \geq 0$, $R(0) \geq 0$.

Dalam formulasi model $SEIQR$, kita mendefinisikan daerah invarian positif, titik ekuilibrium bebas penyakit, bilangan reproduksi dasar, titik ekuilibrium endemik, analisis kestabilan titik ekuilibrium bebas penyakit, analisis kestabilan titik ekuilibrium endemik, dan analisis sensitivitas bilangan reproduksi dasar.

2.1. Daerah Invarian Positif. Pada subbab ini, teorema daerah invarian positif sebagai berikut.

Teorema 2.1. *Jika $S(0) \geq 0$, $E(0) \geq 0$, $I(0) \geq 0$, $Q(0) \geq 0$, $R(0) \geq 0$, maka $S(t) \geq 0$, $E(t) \geq 0$, $I(t) \geq 0$, $Q(t) \geq 0$, $R(t) \geq 0$, dengan $\forall t \geq 0$.*

Bukti. $\mathbf{x} = [S, E, I, Q, R]$

- (1) Untuk $x_1 = S = 0$ dan $E, I, Q, R \geq 0$, maka $f_1 = \Lambda + \rho R + \varphi Q \geq 0$.
- (2) Untuk $x_2 = E = 0$ dan $S, I, Q, R \geq 0$, maka $f_2 = 0$.
- (3) Untuk $x_3 = I = 0$ dan $S, E, Q, R \geq 0$, maka $f_3 = \gamma E \geq 0$.
- (4) Untuk $x_4 = Q = 0$ dan $S, E, I, R \geq 0$, maka $f_4 = \eta E + \phi I \geq 0$.
- (5) Untuk $x_5 = R = 0$ dan $S, E, I, Q \geq 0$, maka $f_5 = \tau Q + \alpha I + \xi S \geq 0$.

Berdasarkan proposisi, R_+^5 adalah himpunan invarian untuk Sistem 2.1.

Didefinisikan daerah fisibel untuk Sistem (2.1) sebagai berikut.

$$\Omega = \left\{ (S, E, I, Q, R) \in R_+^5 : 0 \leq S + E + I + Q + R \leq \frac{\Lambda}{\mu} \right\}.$$

□

Teorema 2.2. *Himpunan Ω merupakan himpunan invarian positif yang terbatas dari Sistem (2.1).*

Bukti. $N = S + E + I + Q + R$ menyatakan jumlah populasi pada saat t . Himpunan Ω merupakan himpunan invarian positif. Misalkan $x = X(t)$ dan $v = N(t)$, peroleh

$$0 \leq N(t) \leq X(t) = \frac{\Lambda}{\mu} + \left(N(0) - \frac{\Lambda}{\mu} \right) e^{-\mu t}.$$

Diambil sebarang nilai awal $N(0) \in \Omega$, artinya $N(0) \leq \frac{\Lambda}{\mu}$.

Menurut Persamaan 2.2, untuk semua $t \geq 0$, berlaku

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) + E(t) + I(t) + Q(t) + R(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} N(t) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Lambda}{\mu}.$$

Diperoleh $0 \leq N(t) \leq U$ dengan $U = \frac{\Lambda}{\mu}$. Terbukti bahwa himpunan Ω merupakan invariant positif dan terbatas. \square

2.2. Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit. Pada subbab ini, akan di bahas titik ekuilibrium bebas penyakit E_0 dari Sistem (2.1). Untuk mencari titik ekuilibrium bebas penyakit Sistem (2.1) memenuhi kondisi pada saat $E = I = Q = 0$.

Teorema 2.3. *Titik ekuilibrium bebas penyakit untuk Sistem (2.1) adalah*

$$E_0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu + \xi} + \frac{\rho\xi\Lambda}{(\mu + \xi)(\mu\rho + \xi\mu + \mu^2)}, 0, 0, 0, \frac{\xi\Lambda}{\mu\rho + \xi\mu + \mu^2} \right).$$

Bukti. Titik ekuilibrium bebas penyakit $E = I = Q = 0$. Diperoleh

(1)

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= 0 \\ S &= \frac{\Lambda + \rho R}{\mu + \xi}. \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= 0 \\ R &= \frac{\xi\Lambda}{\mu\rho + \xi\mu + \mu^2}. \end{aligned}$$

Nilai R disubstitusikan ke persamaan S dan diperoleh $S = \frac{\Lambda}{\mu + \xi} + \frac{\rho\xi\Lambda}{(\mu + \xi)(\mu\rho + \xi\mu + \mu^2)}$. \square

Titik ekuilibrium bebas penyakit adalah

$$E_0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu + \xi} + \frac{\rho\xi\Lambda}{(\mu + \xi)(\mu\rho + \xi\mu + \mu^2)}, 0, 0, 0, \frac{\xi\Lambda}{\mu\rho + \xi\mu + \mu^2} \right).$$

2.3. Bilangan Reproduksi Dasar. Pada subbab ini, bilangan reproduksi dasar akan ditentukan menggunakan metode *next generation matrix*.

Langkah pertama menentukan kelas terinfeksi \mathbf{x} dan kelas tidak terinfeksi \mathbf{y} . Pada Sistem 2.1, kelas yang terinfeksi adalah $E(t)$ dan $I(t)$, sedangkan kelas yang tidak terinfeksi adalah $S(t)$, $Q(t)$, dan $R(t)$.

Selanjutnya, $\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \mathcal{V}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ dengan

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{dE}{dt} \\ \frac{dI}{dt} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \beta_1 SE - \mu E - \gamma E - \eta E \\ \beta_2 SI + \gamma E - (\mu + \delta)I - \phi I - \alpha I \end{bmatrix} \\ &= \mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \mathcal{V}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{aligned}$$

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} \frac{dS}{dt} \\ \frac{dQ}{dt} \\ \frac{dR}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda + \rho R + \varphi Q - \beta_1 S E - \beta_2 S I - \mu S - \xi S \\ \eta E + \phi I - \varphi Q - (\mu + \delta) Q - \tau Q \\ \tau Q + \alpha I - \rho R - \mu R + \xi S \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, akan di bentuk matriks F dan V sebagai berikut.

$$F = \begin{bmatrix} \beta_1 \left(\frac{\Lambda}{\mu + \xi} + \frac{\rho \xi \Lambda}{(\mu + \xi)(\mu \rho + \xi \mu + \mu^2)} \right) & 0 \\ 0 & \beta_2 \left(\frac{\Lambda}{\mu + \xi} + \frac{\rho \xi \Lambda}{(\mu + \xi)(\mu \rho + \xi \mu + \mu^2)} \right) \end{bmatrix}$$

dan

$$V = \begin{bmatrix} \mu + \gamma + \eta & 0 \\ -\gamma & \mu + \delta + \phi + \alpha \end{bmatrix}$$

Oleh karena itu, bilangan reproduksi dasar diperoleh

$$\mathcal{R}_0 = \max\{\mathcal{R}_{0E}, \mathcal{R}_{0I}\}$$

$$\text{dengan } \mathcal{R}_0 = \max\left(\frac{\beta_1}{p_1} \left(\frac{\Lambda}{m_1} + \frac{\rho \xi \Lambda}{m_1 m_2} \right), \frac{\beta_2}{p_2} \left(\frac{\Lambda}{m_1} + \frac{\rho \xi \Lambda}{m_1 m_2} \right)\right)$$

2.4. Titik Ekuilibrium Endemik. Pada subbab ini, akan dibahas tentang titik ekuilibrium endemi

Titik ekuilibrium endemik merupakan titik ekuilibrium saat kelas terinfeksi tidak nol atau saat penyakit menyebar dalam populasi. Berikut diberikan teorema mengenai titik ekuilibrium endemik Sistem 2.1.

Teorema 2.4. *Jika $\frac{k_2}{k_1} \mathcal{R}_{0I} < \mathcal{R}_{0E} < \max\left\{\mathcal{R}_{0I}, 1 + \frac{2\rho\xi p_4 m_1}{g}\right\}$, maka tidak terdapat suatu titik ekuilibrium endemik. Sebaliknya, jika $\max\left\{\mathcal{R}_{0I}, 1 + \frac{2\rho\xi p_4 m_1}{g}\right\} < \mathcal{R}_{0E} < \frac{k_2}{k_1} \mathcal{R}_{0I}$, maka terdapat titik ekuilibrium endemik*

$$E_1 = (S^*, E^*, I^*, Q^*, R^*) \quad (2.2)$$

dengan

$$S^* = \frac{p_1}{\beta_1} \quad (2.3)$$

$$E^* = \frac{\Lambda p_2 p_3 p_4 (\mathcal{R}_{0E} - \mathcal{R}_{0I}) \left(\left(1 + \frac{2\rho\xi(p_4 m_1)}{g} \right) - \mathcal{R}_{0E} \right)}{\mathcal{R}_{0E} (\mathcal{R}_{0E} k_1 - \mathcal{R}_{0I} k_2)} \quad (2.4)$$

$$I^* = \frac{\Lambda \gamma p_3 p_4 \left(\left(1 + \frac{2\rho\xi(p_4 m_1)}{g} \right) - \mathcal{R}_{0E} \right)}{\mathcal{R}_{0E} k_1 - \mathcal{R}_{0I} k_2} \quad (2.5)$$

$$Q^* = \frac{\left(\left(1 + \frac{2\rho\xi(p_4 m_1)}{g} \right) - \mathcal{R}_{0E} \right) (\mathcal{R}_{0E} (\Lambda \eta p_2 p_4 + \Lambda \gamma \phi p_4) - \mathcal{R}_{0I} \Lambda \eta p_2 p_4)}{\mathcal{R}_{0E} (\mathcal{R}_{0E} k_1 - \mathcal{R}_{0I} k_2)} \quad (2.6)$$

$$R^* = \frac{\left(\left(1 + \frac{2\rho\xi(p_4 m_1)}{g} \right) - \mathcal{R}_{0E} \right) ((\Lambda \phi \tau + \Lambda \gamma p_3 + \Lambda \eta \tau p_2) \mathcal{R}_{0E} - \Lambda \eta \tau p_2 \mathcal{R}_{0I})}{\mathcal{R}_{0E} (\mathcal{R}_{0E} k_1 - \mathcal{R}_{0I} k_2)} \quad (2.7)$$

$$- \frac{\xi p_1}{p_4 \beta_1}. \quad (2.8)$$

2.5. Kestabilan Lokal Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit. Pada bagian ini akan di analisis kestabilan lokal di sekitar titik ekuilibrium bebas penyakit. Analisis kestabilan ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks Jacobian yang di peroleh melalui metode linearisas 2.1 di sekitar titik ekuilibrium.

Berikut diberikan teorema mengenai analisis kestabilan titik ekuilibrium bebas penyakit Sistem 2.1.

Teorema 2.5. *Jika $\mathcal{R}_{0E} < 1$ dan $\mathcal{R}_{0I} < 1$ maka titik ekuilibrium bebas penyakit pada Sistem (2.1) stabil asimtotik lokal.*

Bukti. Diperoleh nilai eigen sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= n_1 - p_1, \\ \lambda_2 &= n_2 - p_2, \\ \lambda_3 &= -p_3 \\ &= -(\varphi + \mu + \delta + \tau) \\ \lambda_4 &= -\mu, \text{ dan} \\ \lambda_5 &= -(\mu + \rho + \xi). \end{aligned}$$

Selanjutnya, λ_1 dan λ_2 diperoleh

$$\lambda_1 = n_1 - p_1 = (\mu + \gamma + \eta)(\mathcal{R}_{0E} - 1).$$

Dengan demikian, untuk $\mathcal{R}_{0E} < 1$, nilai $\lambda_1 < 0$. Kemudian,

$$\lambda_2 = n_2 - p_2 = (\mu + \delta + \phi + \alpha)(\mathcal{R}_{0I} - 1).$$

Dengan demikian, untuk $\mathcal{R}_{0I} < 1$, nilai $\lambda_2 < 0$.

Oleh karena, jika $\mathcal{R}_{0E} < 1$ dan $\mathcal{R}_{0I} < 1$, maka $\lambda_i < 0$ atau titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik lokal. \square

Diberikan sifat kestabilan lokal titik ekuilibrium endemik dari Sistem 2.1.

Teorema 2.6. *Titik ekuilibrium endemik 2.2 pada Sistem 2.1 stabil asimtotik lokal jika memenuhi syarat-syarat sebagai berikut*

- (1) $a_1 > 0$
- (2) $a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$
- (3) $b_1 a_3 - a_1 b_2 > 0$
- (4) $c_1 b_2 - b_1 c_2 > 0$
- (5) $a_5 > 0$

Bukti. Berdasarkan matriks Jacobian pada titik ekuilibrium 2.3, diperoleh dari persamaan

$$a_0 \lambda^5 + a_1 \lambda^4 + a_2 \lambda^3 + a_3 \lambda^2 + a_4 \lambda + a_5 = 0, \quad (2.9)$$

dengan

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= -e_1 - e_{16} - e_9 - e_{12} \\ a_2 &= -e_2 e_6 + (e_1 + e_{16} + e_9) e_{12} + (e_1 + e_9) e_{16} + e_1 e_9 - e_{13} e_5 - e_3 e_7 \\ a_3 &= (-e_{10} e_4 + e_{12} e_2 + e_{16} e_2 + e_2 e_9 - e_3 e_8) e_6 + ((-e_1 - e_9) e_{16} - e_1 e_9 + e_3 e_7 \\ &\quad + e_{13} e_5) e_{12} + (-e_1 e_9 + e_3 e_7) e_{16} + e_5 e_{13} e_9 - e_7 (e_{11} e_4 + e_{14} e_5) \\ a_4 &= ((-e_{16} e_2 - e_2 e_9 + e_3 e_8) e_{12} + (e_{10} e_4 - e_2 e_9 + e_3 e_8) e_{16} + e_{10} e_4 e_9 \\ &\quad + (-e_{10} e_{15} - e_{14} e_8) e_5 - e_{11} e_4 e_8) e_6 + ((e_1 e_9 - e_3 e_7) e_{16} - e_5 (e_{13} e_9 - e_{14} e_7)) e_{12} \\ &\quad - e_7 e_{11} (e_{15} e_5 - e_{16} e_4) \\ a_5 &= (((e_2 e_9 - e_3 e_8) e_{16} + e_{14} e_5 e_8) e_{12} + (e_{15} e_5 - e_{16} e_4) (e_{10} e_9 - e_{11} e_8)) e_6 \end{aligned}$$

Dari 2.2 didapat fungsi polinomial yang lebih sederhana dalam persamaan 2.9, selanjutnya menggunakan kriteria Routh Hurwitz, jika $a_0 = 1 > 0$, $a_1 > 0$, $b_1 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$, $c_1 = b_1 a_3 - a_1 b_2 > 0$, $d_1 = c_1 b_2 - b_1 c_2 > 0$, dan $a_5 > 0$ maka titik ekuilibrium 2.2 stabil asimtotik.

Titik ekuilibrium endemik stabil asimtotik lokal mempunyai arti bahwa jika sebagian kecil individu dalam populasi terinfeksi, seiring berjalannya waktu akan terjadi epidemi, berarti individu terinfeksi tetap ada dalam populasi. \square

2.6. Analisis Sensitivitas Bilangan Reproduksi Dasar. Analisis sensitivitas pada bilangan reproduksi dasar dilakukan untuk mengetahui parameter mana yang paling berpengaruh dalam penyebaran penyakit.

Tabel indeks sensitivitas dari \mathcal{R}_{0E} sebagai berikut.

TABEL 2. Indeks sensitivitas dari \mathcal{R}_{0E}

Parameter	Tanda
β_1	+
Λ	+
γ	-
η	-
ρ	+
ξ	-
μ	-

Tabel indeks sensitivitas dari \mathcal{R}_{0I} sebagai berikut.

TABEL 3. Indeks sensitivitas dari \mathcal{R}_{0I}

Parameter	Tanda
β_2	+
Λ	+
δ	-
ϕ	-
α	-
ρ	+
ξ	-
μ	-

Parameter yang paling berpengaruh adalah β_1 , β_2 , Λ , dan ρ .

3. STUDI KASUS COVID-19

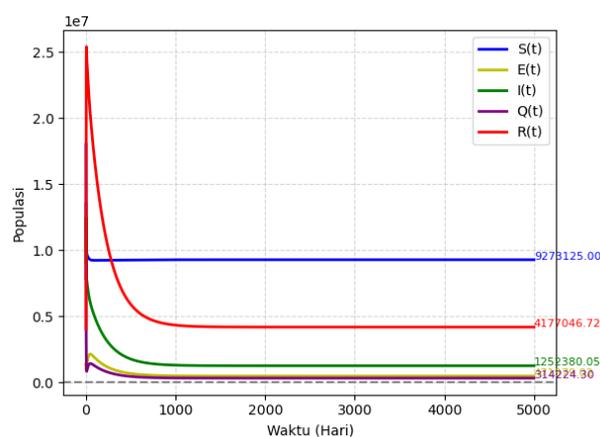
Studi kasus dilakukan dengan tujuan untuk melihat beberapa model penerapannya dengan menggunakan model paling umum $SEIQR$ dan melihat simulasi numerik untuk melengkapi hasil-hasil yang telah diperoleh secara analitik, serta mengetahui interpretasi dari model yang sudah dikonstruksi. Simulasi numerik tersebut meliputi simulasi numerik untuk menunjukkan jumlah individu yang masih terinfeksi dalam kurun waktu pada beberapa persentase pemberian vaksin, mengetahui pengaruh vaksin terhadap wabah terinfeksi dalam suatu populasi, dan mengetahui jumlah individu pada subpopulasi terinfeksi dalam waktu tertentu. Penerapan model $SEIQR$ disajikan untuk model penyakit Covid-19, asumsi berdasarkan [6]. Diberikan nilai parameter pada Tabel.

TABEL 4. Nilai Parameter Penyakit Covid-19

Parameter	Nilai	Satuan	Keterangan
Λ	67447	individu	[6]
β_1	8×10^{-8}	$\frac{\text{individu}}{\text{hari}}$	[6]
β_2	$7,9 \times 10^{-8}$	$\frac{\text{individu}}{\text{hari}}$	[6]
μ	$3,95 \times 10^{-3}$	$\frac{1}{\text{hari}}$	[6]
ρ	$2,66 \times 10^{-1}$	$\frac{1}{\text{hari}}$	[6]
φ	4×10^{-1}	$\frac{1}{\text{hari}}$	[6]
γ	2×10^{-1}	$\frac{1}{\text{hari}}$	[6]
η	$5,379 \times 10^{-1}$	$\frac{1}{\text{hari}}$	[6]
ϕ	$5,380 \times 10^{-9}$	$\frac{1}{\text{hari}}$	[6]
α	8×10^{-1}	$\frac{1}{\text{hari}}$	[6]
τ	4×10^{-1}	$\frac{1}{\text{hari}}$	[6]
δ	4×10^{-3}	$\frac{1}{\text{hari}}$	[6]

Parameter vaksin $\xi = 0$ dan $\xi = 0,965$ [4].

Berikut grafik trayektori model $SEIQR$ pada Covid-19 tanpa vaksin ($\xi = 0$).

FIGURE 2. Grafik model $SEIQR$ pada Covid-19 tanpa vaksin ($\xi = 0$)

Pada Gambar 2 bilangan reproduksi dasar $\mathcal{R}_0 = \max\{1, 841363064; 1, 669583502\}$ maka titik ekuilibrium bebas penyakit tidak stabil. $E_1 = (9, 273125000 \times 10^6; 471979.0086; 1, 252380012 \times 10^6; 314224, 2886; 4, 177046589 \times 10^6)$ dan Teorema 2.9 didapat titik ekuilibrium endemik stabil asimtotik lokal dan akan terjadi wabah dalam suatu populasi.

Berikut grafik trayektori model $SEIQR$ pada Covid-19 menggunakan vaksin ($\xi = 0.965$).

Analisis sensitivitas \mathcal{R}_{0E} terhadap parameter vaksin, diberikan grafik \mathcal{R}_{0E} terhadap parameter ξ .

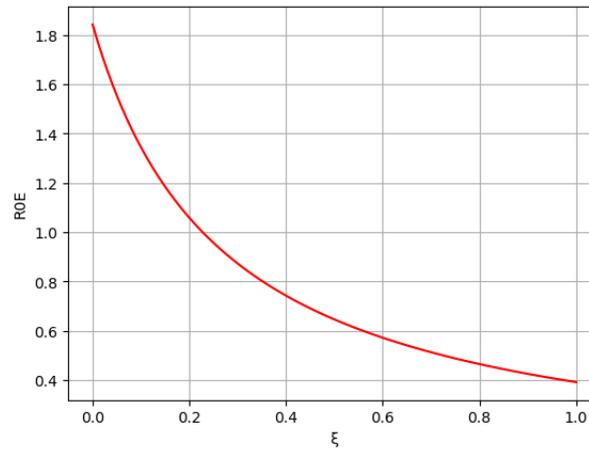


FIGURE 5. Grafik \mathcal{R}_{0E} terhadap ξ

Pada Gambar 5 jika diberikan vaksin lebih dari 0,23 maka wabah terinfeksi laten akan berkurang yaitu $\mathcal{R}_{0E} < 1$. Hasil indeks sensitivitas untuk parameter rata-rata vaksin negatif artinya \mathcal{R}_{0E} menurun.

Trayektori subpopulasi E pada Gambar 6 berikut.

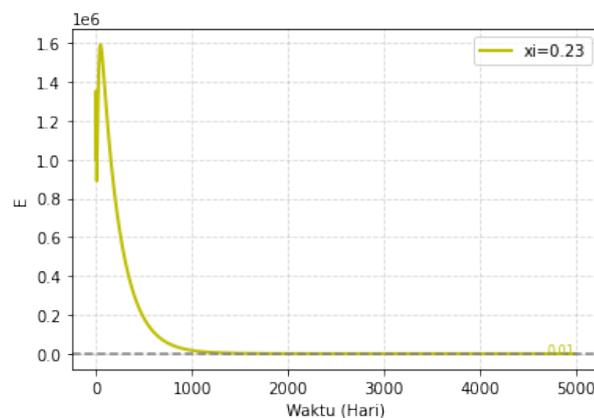


FIGURE 6. Grafik subpopulasi E terhadap waktu pada hari ke-5000

Pada Gambar 6 diberikan vaksin sebanyak $0,2295 \approx 23\%$ artinya epidemi pada Covid-19 menjadi bebas penyakit atau dapat dikatakan Covid-19 di suatu populasi akan menghilang.

Trayektori untuk mengetahui jumlah individu subpopulasi terinfeksi dalam kurun waktu 5000 hari dengan nilai awal $I_0 = 9$ juta individu.

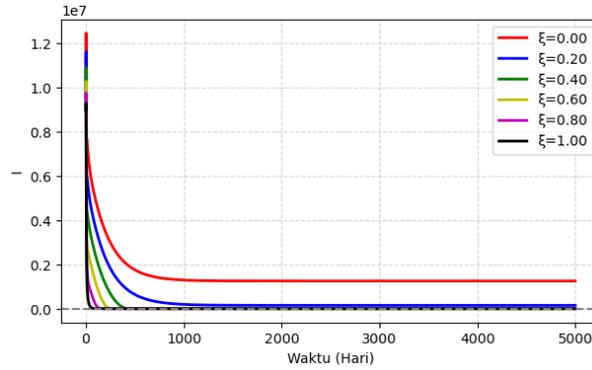


FIGURE 7. Trayektori jumlah individu pada subpopulasi terinfeksi dalam kurun waktu 5000 hari

Gambar 7 merupakan grafik untuk mengetahui jumlah individu I pada hari ke 5000 dengan memberikan parameter $\xi = 0\%$ dan $\xi = 20\%$ masih ada populasi yang terinfeksi pada hari ke 5000. Untuk pemberian vaksin $40\% - 100\%$ sudah tidak terjadi suatu endemik di suatu populasi.

Analisis sensitivitas \mathcal{R}_{0I} terhadap parameter vaksin, diberikan grafik dari \mathcal{R}_{0I} terhadap parameter ξ .

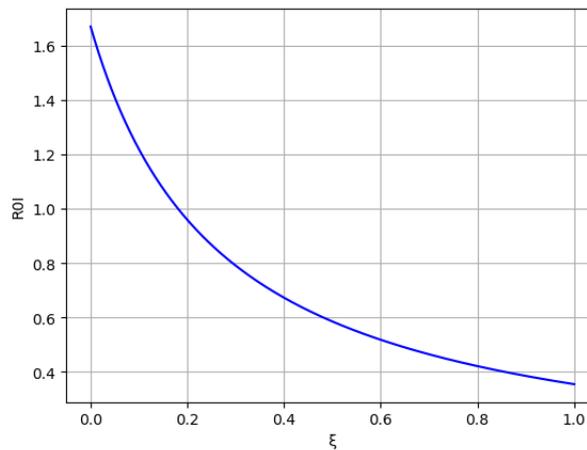


FIGURE 8. Grafik \mathcal{R}_{0I} terhadap ξ

Pada Gambar 8 jika diberikan vaksin sebesar 0,17 maka $\mathcal{R}_{0I} = 1$. Oleh karena $\mathcal{R}_{0E} = 1$ dengan $\xi = 0,23$ dan $\mathcal{R}_{0I} = 0,90$ dengan $\xi = 0,23$, serta $\mathcal{R}_0 = \max\{1; 0,90\}$,

sehingga $\mathcal{R}_0 = 1$ dengan nilai parameter ξ yang di ambil sebesar $\xi = 0,23$. Artinya jika disuatu populasi diberikan vaksin lebih dari 0,23 maka wabah terinfeksi akan berkurang yaitu $\mathcal{R}_{0I} < 1$.

Trayektori subpopulasi I pada Gambar 9 berikut.

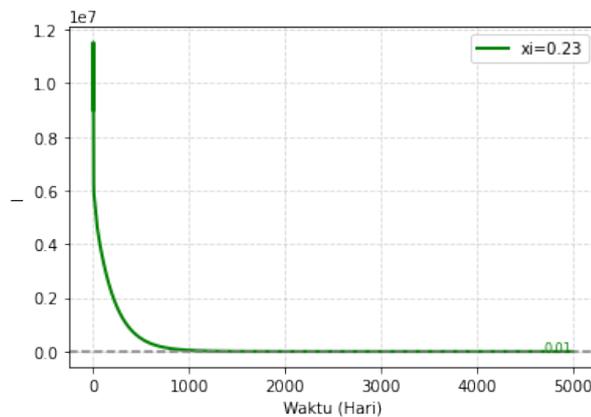


FIGURE 9. Grafik subpopulasi I terhadap waktu pada hari ke-5000

Pada Gambar 9 diberikan vaksin sebanyak $0,2297 \approx 23\%$ artinya epidemi pada Covid-19 di suatu populasi akan menghilang.

4. KESIMPULAN

Makalah penelitian ini memberikan eksplorasi komprehensif terhadap model $SEIQR$ yang dirumuskan pada Sistem 2.1. Dalam model $SEIQR$ didapat titik ekuilibrium bebas penyakit E_0 dan titik ekuilibrium endemik E_1 , serta dilakukan analisis kestabilan lokal dan analisis sensitivitas.

Studi kasus dilakukan menggunakan model $SEIQR$ yang diterapkan pada masalah COVID-19. Hasil studi menunjukkan bahwa jika suatu populasi diberikan tingkat vaksinasi sebesar 23% maka epidemi COVID-19 dalam populasi tersebut akan menghilang.

References

- [1] S. Al-Shanfari, I. M. Elmojtaba, N. Al-Salti, and F. Al-Shandari, "Mathematical analysis and optimal control of cholera-malaria co-infection model," *Results in Control and Optimization*, vol. 14, no. 10-11, 2024. [Online]. Available: <https://www.researchgate.net/publication/378137635>.
- [2] Anton, H and Rorres, C, *Elementary Linear Algebra, Application Version Ninth Edition*, John Wiley and Son, 2005.
- [3] Aryati, Lina, *Diktat Bio Matematika*, FMIPA UGM, 2013.
- [4] F. Aulani, W. M. Kusumawinahyu, and I. Darti, "Dynamical Analysis and Parameter Estimation of a Model of Hepatitis B Disease Spread in Malang," *Hepatitis B Disease Model*, vol. 11 No. 3, 2021. [Online]. Available: <https://jels.ub.ac.id/index.php/jels/article/view/441/374>.

- [5] Berman, A dan Plemmons, R. J, *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*, Academic Press, 1979.
- [6] A. S. Bhadauria, S. Devi, and N. Gupta, "Modelling and analysis of a SEIQR model on COVID-19 pandemic with delay," *Modeling Earth Systems and Environment*, vol. 8, no. 3201-3214, 2022. [Online]. Available: <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC8478011/>.
- [7] Boyd, S, *Basic Lyapunov Theory*, Stanford Universit, 2008.
- [8] Castillo-Chavez, C and Brauer, F, *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology Second Edition*, Springer, 2012.
- [9] Haddad, W. M., Chellaboina, V., dan Hui, Q, *Nonnegative and Compartmental Dynamical System*. Princeton University Press, 2010.
- [10] Ma, Z and Li, J, *Dynamical Modelling and Analysis of Epidemics*. World Scientific Publishing Company, 2009.
- [11] Milev, M, *Properties and Application of M-Matrices*, University of Food Technology, 2013.
- [12] Murray, J. D, *Mathematical Biology I. An Introduction*, Springer, 2002.
- [13] Olsder, G. J and van der Woude, J.W, *Mathematical Systems Theory Second Edition*, Delft University Press, 2003.
- [14] Perko, L, *Differential Equations and Dynamical Systems Third Edition*, Springer, 2001.
- [15] Qu, Z, *Cooperative Control of Dynamical Systems, Application to Autonomous Vehicles*, Springer-Verlag, 2009.
- [16] Ross, S. L, *Differential Equation Third Edition*, John Wiley and Son, 2004.
- [17] Sherbert, D. R dan Bartle, R. S, *Introduction to Real Analysis*, John Wiley and Sons, Inc, 2011.
- [18] Widodo, *Diktat Pengantar Model Matematika*, Universitas Gadjah Mada, 2011.
- [19] Widowati dan Sutimin, *Buku ajar pemodelan matematika*, Universitas Diponegoro, 2007.
- [20] Wiggins, S., *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos Second Edition*, Springer-Verlag, New York, 2003.

ARIMA TRISMININGSIH: Universitas Gadjah Mada.
E-mails: arimatrisminingsih@mail.ugm.ac.id

NANANG SUSYANTO: Universitas Gadjah Mada.
E-mail: nanang_susyanto@ugm.ac.id

NOORMA YULIA MEGAWATI: Universitas Gadjah Mada.
E-mail: noorma_yulia@ugm.ac.id