Jurnal Matematika Thales (JMT), 2024
Vol. 06 No. 01

METODE PERTURBASI *SINGULAR* PADA MASALAH *BOUNDARY LAYER*

(SINGULAR PERTURBATION METHOD ON BOUNDARY LAYER PROBLEM)

ANJASSWARI FATONA DEWI*, FAJAR ADI KUSUMO

Abstract. In this thesis, the author will discuss the singular perturbation method in boundary layer problems. The author chose to discuss the singular perturbation method in boundary layer problems because the solution of the boundary layer problem undergoes changes due to the given perturbation and the presence of a specified time scale. Before explaining the singular perturbation method, the author will first explain the perturbation method itself and then describe the usefulness of the singular perturbation method. Furthermore, using the singular perturbation method, the author will also explain the boundary layer problem that will be solved with the singular perturbation method. In the singular perturbation method, several related theories are required to solve the boundary layer problem, which will be explained in the following chapters.
Keywords: Perturbation Singular Method, Boundary Layer Problem

---

2010 Mathematics Subject Classification: 35B20

Abstrak. Pada tesis ini penulis akan membahas mengenai metode perturbasi *singular* pada masalah *boundary layer*. Penulis memilih pembahasan mengenai metode perturbasi *singular* pada masalah *boundary layer* karena pada solusi dari masalah *boundary layer* mengalami perubahan akibat gangguang yang diberikan dan adanya batas skala waktu yang diberikan. Sebelum dijelaskan mengenai metode perturbasi *singular* penulis akan menjelaskan terlebih dahulu mengenai metode perturbasi itu sendiri dan selanjutnya akan menjelaskan kegunaan dari metode perturbasi *singular*. Kemudian dengan menggunakan metode perturbasi *singular* akan dijelaskan juga mengenai masalah *boundary layer* yang nantinya akan diselesaikan dengan metode perturbasi *singular*. Di dalam metode perturbasi *singular* untuk menyelesaikan masalah *boundary layer* diperlukan beberapa teori - teori yang saling berhubungan yang nantinya akan dijelaskan pada bab - bab selanjutnya.
Kata-kata kunci: Metode Perturbasi *Singular*, Masalah *Boundary Layer*

1. PENDAHULUAN

Dalam bidang matematika, metode perturbasi merupakan metode aproksimasi yang digunakan untuk memperoleh solusi perkiraan dari masalah suatu sistem persamaan diferensial dengan mempertimbangkan andanya gangguan. Metode perturbasi terbagi menjadi dua bagian, yaitu ketika sistem persamaan diferensial tanpa gangguan dan adanya gangguan. Ketika sistem persamaan diferensial tidak ada gangguan, maka dapat diselesaikan dengan mudah. Akan tetapi, jika sistem persamaan diferensial memiliki gangguan maka akan terjadi perubahan yang didapat dari solusi sistem persamaan diferensial. Berdasarkan sifat metode perturbasi ada dua jenis metode perturbasi, yaitu : perturbasi reguler dan perturbasi *singular*.

Metode perturbasi reguler merupakan aproksimasi dengan gangguannya diasumsikan sebagai parameter gangguan yang cukup kecil dan solusi yang diperoleh dalam bentuk deret.Metode perturbasi reguler memiliki bentuk persamaan sebagai berikut

$$y'' + \varepsilon p(x)y' + q(x)y = f(x, \varepsilon), \tag{1.1}$$

dengan ε adalah parameter kecil, $y(x)$ solusi yang akan dicari dan $p(x)$, $q(x)$ merupakan suatu fungsi dari x. Untuk fungsi $f(x, \varepsilon)$ menyatakan suatu fungsi yang bergantung pada x dan ε.
Diasumsikan solusi dari Persamaan (1.1) dapat ditulis dalam bentuk ekspansi sebagai berikut

$$y(x) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \dots, \tag{1.2}$$

dengan ε parameter gangguan yang cukup kecil, y solusi keseluruhan, dan y_0, y_1, y_2, $\cdots$ suku - suku deret yang menggambarkan tingkat pertama, kedua, dan seterusnya dari gangguan.

Untuk metode perturbasi *singular* adalah metode pendekatan yang digunakan ketika terdapat singularitas dalam sistem yang tidak dapat diselesaikan dengan metode perturbasi reguler. Metode ini digunakan untuk memperoleh solusi pendekatan yang melibatkan parameter kecil atau variabel indepen yang mendekati *boundary*. Metode ini memerlukan analisis perilaku sistem pada skala waktu yang berbeda dan mengidentifikasi apakah ada faktor dominan yang mempengaruhi perilaku dari sistem secara keseluruhan oleh parameter kecil ε. Sama seperti metode perturbasi reguler, metode perturbasi *singular* memiliki persamaan sebagai berikut :

$$\varepsilon y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x, y, \varepsilon), \tag{1.3}$$

dengan ε adalah parameter kecil, $y(x)$ adalah solusi yang akan dicari, dan $p(x)$ $q(x)$ adalah fungsi x yang diketahui. Untuk fungsi $f(x, y, \varepsilon)$ menyatakan fungsi yang bergantung pada x, y dan ε.
Dengan mengasumsikan solusi dari Persamaan (1.3) dengan ekspansi deret sebagai berikut

$$y(x) = y_0(x) + f(\varepsilon)y_1(x) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \tag{1.4}$$

dengan y merupakan solusi keseluruhan, y_0 solusi untuk sistem dasar, dan $f(\varepsilon)$ fungsi yang bergantung pada parameter gangguan dan digunakan untuk menggambarkan orde tingkat pertama, kedua, dan seterusnya dari gangguan yang terkait dengan singularitas.

Dari penjelasan mengenai metode perturbasi terutama mengenai metode perturbasi *singular*, diketahui bahwa solusi yang akan dicari pada perturbasi *singular* akan mengalami perubahan yang cukup signifikan akibat pengaruh dari gangguan yang diberikan dan adanya beberapa skala waktu yang berbeda pada sistem persamaan diferensial. Perubahan yang cukup signifikan akibat gangguan yang diberikan tersebut dikenal juga sebagai teori *boundary layer*, dengan teori *boundary layer* (lapisan batas) yang mengarah pada daerah persekitaran dengan batas pada solusi sistem persamaan diferensial. Karakteristik daerah ini dapat dilihat dari parameter kecil dalam sistem dan sifatnya dijelaskan menggunakan teori *boundary layer*.

Berdasarkan penjelasan singkat mengenai metode perturbasi. Pada penelitian ini, penulis akan menjelaskan lebih lanjut mengenai permasalah *boundary layer* dengan metode perturbasi *singular*. Dan juga akan diberikan beberapa contoh yang berhubungan dengan metode perturbasi *singular* pada masalah *boundary layer*.

2. TINJAUAN PUSTAKA

Dalam penelitian ini digunakan Ferdinant Verhulst (2005) sebagai panduan utama, dalam buku yang ditulisnya dibahas mengenai metode perturbasi *singular* dan teori *boundary layer* (lapisan batas) untuk menyelesaikan masalah yang berhubungan dengan dua metode tersebut.

Sebagai acuan lain dalam menyelesaikan masalah yang akan diteliti, digunakan beberapa buku antara lain Ferdinant Verhulst (1996) mengenai perturbasi reguler, Ross (1984) dan Boyce (2001) mengenai konsep persamaan diferensial, Kuznetsov (1998) mengenai sistem dinamika, John, K. Hunter (2004) mengenai analisis asimtotik. Selain itu, referensi yang digunakan adalah dari Bartle (2011) mengenai barisan fungsi yang konvergen dan konvergen seragam, serta kondisi Lipschitz dan Deret Taylor.

2.1. Estimasi dan Order Simbol. Pada subbab ini akan dibahas mengenai estimasi dan order simbol sebagai konsep dasar yang akan digunakan untuk membahas tentang teori aproksimasi. Estimasi merupakan aproksimasi suatu fungsi menggunakan metode matematis yang lebih sederhan secara komutasi. Misalnya pada masalah perturbasi *singular*, estimasi digunakan untuk mendapatkan aproksimasi yang baik dari solusi suatu sistem dengan metode perturbasi. Sedangkan order simbol adalah konsep yang digunakan dalam perturbasi *singular* untuk mendeskripsikan perbedaan dalam perubahan dalam suatu sistem dikarenakan adanya suatu gangguan.

Dengan mengestimasi suatu fungsi yang bergantung pada parameter terkecil ε dengan diperhatikan fungsi kontinu $f(\varepsilon)$ dan $g(\varepsilon)$ dengan $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 << 1$. Untuk membandingkan fungsi - fungsi tersebut, berikut akan diberikan penjelasannya dengan menggunakan simbal Landau's $\mathcal{O}$ dan o.

Definisi 2.1. *Suatu fungsi $f(\varepsilon)$ dikatakan orde dari fungsi $g(\varepsilon)$ yang dinotasikan dengan*

$$f(\varepsilon) = \mathcal{O}(g(\varepsilon)),$$

untuk $\varepsilon \to a$ jika berlaku,

$$\lim_{\varepsilon \to a} \frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} = A,$$

dengan A merupakan konstanta positif yang tak-nol.

Definisi 2.2. *Suatu fungsi $f(\varepsilon)$ dikatakan jauh lebih kecil dari fungsi $g(\varepsilon)$ yang dinotasikan sebagai berikut*

$$f(\varepsilon) = o(g(\varepsilon)) \qquad \textit{atau} \qquad f(\varepsilon) \ll g(\varepsilon),$$

untuk $\varepsilon \to a$, jika berlaku

$$\lim_{\varepsilon \to a} \frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} = 0.$$

Definisi 2.3. *Suatu fungsi $f(\varepsilon)$ dikatakan asimtotik terhadap fungsi $g(\varepsilon)$ yang dinotasikan sebagai berikut*

$$f(\varepsilon) \sim g(\varepsilon),$$

dengan $\varepsilon \to a$, jika berlaku

$$\lim_{\varepsilon \to a} \frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} = 1.$$

2.2. **Ekspansi Asimtotik.** Ekspansi asimtotik merupakan teknik matematika yang digunakan untuk memperkirakan solusi dari suatu persamaan atau sistem persamaan dalam suatu parameter yang memiliki nilai yang sangat besar atau sangat kecil. Ekspansi asimtotik digunkan untuk memperoleh solusi aproksimasi dari suatu kasus yang memiliki sistem dengan gangguan kecil atau adanya perubahan yang cepat dalam parameter yang dimiliki.
Berikut diberikan definisi dari barisan asimtotik dan deret asimtotik yang berhubungan dengan ekspansi asimtotik.

Definisi 2.4. *Suatu barisan dari fungsi order $\delta_n(\varepsilon)$, dengan $n = 0, 1, 2, \ldots$ dikatakan asimtotik apabila untuk $n = 0, 1, 2, \ldots$ berlaku*

$$\delta_{n+1} = o(\delta_n), \quad \varepsilon \to 0.$$

2.3. **Ekspansi Asimtotik dengan Lebih Variabel.** Diberikan fungsi parameter oleh suatu parameter terkecil $\varepsilon : \phi = \phi_\varepsilon \varepsilon(x)$; $x \in D \subset \mathbb{R}^n$. Jika diambil sebarang εx dan $\varepsilon \sin(x)$ untuk $x \geq 0$ dengan memperhatikan estimasi ε diperoleh bahwa εx tidak terbatas secara seragam pada domain sedangkan $\varepsilon \sin(x)$ terbatas pada domain.

Definisi 2.5. *Misalkan diberikan $\phi_\varepsilon(x)$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ dengan $\phi_\varepsilon \varepsilon$ merupakan elemen himpunan linear fungsi sebarang dengan norm $\|.\|_D$; dan $\delta(\varepsilon)$ adalah fungsi order. Maka untuk $\varepsilon \to 0$ berlaku*

$$\begin{aligned} \phi_\varepsilon(x) = O(\delta(\varepsilon)) \in D \quad & jika \quad \|\phi_\varepsilon\|_D = O(\delta(\varepsilon)), \\ \phi_\varepsilon(x) = o(\delta(\varepsilon)) \in D \quad & jika \quad \|\phi_\varepsilon\|_D = o(\delta(\varepsilon)), \\ \phi_\varepsilon(x) = 0(\delta(\varepsilon)) \in D \quad & jika \quad \|\phi_\varepsilon\|_D = 0(\delta(\varepsilon)). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Definisi 2.6. *$\sum_{n=0}^{m} \psi_n(x, \varepsilon)$ merupakan deret asimtotik di D dengan memperhatikan syarat norm, apabila $\psi_n(x, \varepsilon) = 0_s(\delta_n)$ dan $\delta_n(\varepsilon)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ barisan asimtotik.*

Definisi 2.7. *$\tilde{\phi}_\varepsilon(x)$ merupakan aproksimasi dari $\phi_\varepsilon(x)$ di D dengan memperhatikan syarat norm jika $\phi_\varepsilon \varepsilon(x) = 0_s(1)$ dan $\phi_\varepsilon(x) - \tilde{\phi}_\varepsilon(x) = o(1)$.*

3. METODE PERTURBASI *SINGULAR* PADA MASALAH *BOUNDARY LAYER*

Pada bagian ini akan dibahas mengenai Perturbasi *Singular* dan konsep *boundary layer* yang akan digunakan untuk mengetahui perbedaan penyelesaian masalah dari metode perturbasi reguler dan perturbasi *singular*. Serta pada bab berikutnya akan dijelaskan mengenai penerapan metode Perturbasi *Singular* pada masalah *boundary layer*. Selanjutnya akan dilakukan simulasi pada contoh permasalahan yang diberikan.

3.1. **Perturbasi Singular.**

Definisi 3.1. *Misalkan fungsi $\phi(x)$ didefinisikan pada $D \subset \mathbb{R}^n$, suatu ekspansi asimptiotik untuk $\phi_\varepsilon(x)$ dikatakan reguler jika diberikan ekspansi dalam bentuk*

$$\phi_\varepsilon(x) = \sum_{n=0}^{m} \delta_n(\varepsilon)\psi_n(x) + \mathcal{O}(\delta_{m+1}),$$

dengan $\delta_n(\varepsilon)$, $n = 0, 1, \cdots$ deret asimtotik dan $\psi_n(x)$, $n = 0, 1, \cdots$ suatu fungsi pada D.

Contoh 3.2. *Misalkan $\phi_\varepsilon \varepsilon(x)$ memenuhi Persamaan*

$$\varepsilon \phi''_\varepsilon(x) + \phi'_\varepsilon(x) + \phi_\varepsilon(x) = x^2, \tag{3.1}$$

dengan $\phi''_\varepsilon(x)$ merupakan turunan kedua dari fungsi $\phi_\varepsilon(x)$ terhadap x. Selanjutnya, dengan menggunakan metode ekspansi asimtotik, dapat diperoleh ekspansi asimtotik reguler untuk $\phi_\varepsilon(x)$ dengan $\varepsilon \to 0$.

Pertama, diasumsikan solusi dari Persamaan diferensial (3.1) adalah

$$\phi(x) = \delta_\varepsilon \psi(x) + \mathcal{O}(\varepsilon) \tag{3.2}$$

dengan $\delta_\varepsilon(x)$ adalah barisan asimtotik dan $\psi(x)$ fungsi pada domain D. Substitusikan (3.2) ke dalam Persamaan diferensial (3.1) dan dengan menyamakan koefisien - koefisien yang memiliki nilai ε dengan orde yang sama diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\varepsilon) &: \psi(x) = 0 \\ \mathcal{O}(1) &: \psi''(x) + \psi'(x) + \psi(x) = x^2. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan metode Frobenius dapat dicari ekspansi asimtotik reguler untuk $\psi(x)$. Asumsikan $\psi(x)$ memiliki bentuk solusi

$$\psi(x) = \sum_{n=0} a_n x^{n+s} \tag{3.3}$$

3.2. **Konsep dari *Boundary Layer*.**

Dalam bidang matematika, konsep *boundary layer* atau lapisan batas biasanya muncul dalam berbagai kasus yang berbeda, seperti dinamika fluida, perpindahan panas, maupun permasalahan difusi. Misalkan pada permasalahan dinamika fluida, pada masalah tersebut lapisan batas mengarah ke lapisan fluida yang tipis/lemah mendekati lapisan batas yang kuat dengan perubahan kecepatan fluida yang cepat. Lapisan pada permasalah dinamika fluida cukup penting, karen dapat mempengaruhi aliran fluida secara keseluruhan dan juga dapat mempengaruhi efisiensi sistem teknik aliran fluida, contohnya seperti turbin pada pesawat.

Model matematis dari lapisan batas biasanya menggunakan analisis asimtotik dengan solusinya didekati dengan cara menggunakan deret ekspansi yang memiliki parameter terkecil sebagai karakteristik dari lapisan batas tersebut.

Misalkan diberikan fungsi $\phi_\varepsilon(x)$ yang didefinisikan pada $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Terdapat suatu himpunan bagian S dari domain D sehingga S terhubung dan S berdimensi $\leq n$, dengan $\phi_\varepsilon(x)$ memiliki sifat yang bukan merupakan ekspansi reguler pada setiap himpunan bagian D yang memuat S sehingga daerah persekitaran S di D disebut *boundary layer* dari $\phi_\varepsilon(x)$.

Pada kasus (1.1) dan (1.3), domainnya bersifat satu dimensi. Suatu *boundary layer* memenuhi himpunan bagian S jika mendekati titik *boundary layer* $x = 0$ dari domain. Pada kasus tersebut diperoleh bahwa *boundary layer* berada di dalam domain dan apabila diberikan Persamaan evolusi, maka *boundary layer* pada kasus tersebut akan bergerak dalam satuan waktu.

Oleh karena itu, untuk mengetahui sifat dari $\phi_\varepsilon(x)$ dibutuhkan analisis asimtotik untuk menyelesaikan masalah dengan dimensi yang lebih tinggi. Berikut diberikan tahapan - tahapan konsep dasar *boundary layer*, untuk menyelesaikan masalah aproksimasi fungsi $\phi_\varepsilon(x)$ dalam domain D :

(1) Menurut Definisi 3.1, fungsi $\phi_\varepsilon \varepsilon(x)$ dibentuk ekspansi reguler dalam variabel x yang bertujuan untuk mengetahui batas lapisan luar dari fungsi tersebut atau disebut juga sebagai ekspansi luar (ekspansi *outer*).
(2) Dari poin 1 setelah diketahui batas lapisan luarnya, selanjutnya dapat dibangun *boundary layer* ekspansi dalam yang sesuai. Ekspansi ini biasanya disebut sebagai ekspansi *boundary layer*.

(3) Selanjutnya dilakukan ekspansi antara ekspansi luar dan ekspansi dalam lalu dibandingkan untuk memperoleh ekspansi formal untuk semua domain di D.
(4) Kemudian dibuktikan bahwa ekspansi formal yang diperoleh dari tahapan poin 1-3 menghasilkan pendekatan secara asimtotik dari fungsi $\phi_\varepsilon(x)$.

Dalam beberapa kasus, fungsi $\phi(x)$ didefinisikan secara implisit sebagai solusi dari sistem Persamaan diferensial dengan kondisi awal atau batas. Dalam kasus tersebut dibutuhkan teori perturbasi, agar penggunaan antara aproksimasi formal dan ekspansi formal lebih tepat lagi. Misalkan pada kasus masalah perturbasi

$$L_\varepsilon \phi = f(x),\ x \in D + \text{ kondisi lainnya},$$

dengan $L_\varepsilon \phi$ merupakan operator yang memiliki parameter terkecil ε. Misalkan pada contoh 3.2

$$\varepsilon \ddot{y} + \dot{y} + y = 0,$$

$D = [0, 1]$, $f(x) = 0$, dan syarat batas $y(0) = a$, $y(1) = b$.
Fungsi $\tilde{\phi}_\varepsilon(x)$ disebut aproksimasi formal atau ekspansi formal $\phi_\varepsilon(x)$ jika $\tilde{\phi}$ memenuhi syarat batas untuk aproksimasi tertentu dan jika

$$L_\varepsilon \tilde{\phi} = f(x) + o(1).$$

Untuk membuktikan bahwa $\tilde{\phi}$ merupakan aproksimasi formal, sekaligus membuktikan pendekatan asimtotik dari ϕ secara umum merupakan hal yang cukup sulit, sehingga cukup dibuktikan bahwa fungsi ϕ memenuhi kondisi batas hingga aproksimasi tertentu. Berikut diberikan contoh kasus yang memiliki pendekatan secara asimtotik dan merupakan ekspansi formal.

3.3. **Masalah Nilai Batas pada Dua Titik.** Pada bagian ini penulis akan melakukan pengkajian terlebih dahulu mengenai Masalah *Boundary Layer* orde dua itu sendiri, yang selanjutnya akan dikaji kembali hasil pengembangan dari penyelesaian Masalah *Boundary Layer* dengan menggunakan Metode Perturbasi *Singular*.

Masalah nilai batas pada dua titik merupakan permasalahan matematika yang mencari solusi untuk Persamaan diferensial yang memenuhi kondisi batas yang telah ditentukan pada dua titik yang berbeda.

Masalah nilai batas pada dua titik biasanya terjadi pada Persamaan diferensial biasa yang memiliki orde kedua dengan bentuk

$$y'' = f(x, y(x), y'(x)),$$

dengan $y(x)$ adalah fungsi yang akan dicari solusinya dan $f(x, y(x), y'(x))$ adalah fungsi yang diberikan dengan variabel independen x, variabel dependen y dan turunan pertama y'. Selain bentuk Persamaan diferensial biasa yang memiliki orde kedua, syarat batas juga diberikan dalam bentuk

$$y(a) = y_a, \qquad y(b) = y_b,$$

dengan $a \neq b$, y_a dan y_b merupakan suatu konstanta.

Masalah nilai batas pada dua titik selain terjadi di Persamaan diferensial biasa, dapat juga terjadi dalam permasalahan teori pertubasi *singular*. Kondisi ini melibatkan parameter terkecil ε yang dikalikan dengan turunan orde tertinggi. Parameter ε menunjukkan bahwa ada dua atau lebih skala waktu dalam masalah tersebut.

Bentuk dari masalah nilai batas dengan menggunakan metode perturbasi *singular* dapat dituliskan sebagai berikut

$$\varepsilon y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x, \varepsilon), \qquad a \leq x \leq b,$$

dengan $y(a)$ dan $y(b)$ adalah kondisi batas yang diberikan, serta $p(x)$, $q(x)$ merupakan fungsi *smooth* serta $f(x, \varepsilon)$ merupakan fungsi *forcing* yang bergantung pada parameter kecil ε.

Untuk memperoleh penyelesaian pada masalah nilai batas dua titik dengan menggunakan teori perturbasi *singular* diperlukan aproksimasi yang berbeda dengan penyelesaian pada kasus - kasus masalah nilai batas pada umumnya. Berikut akan diberikan dua contoh kasus yang terjadi pada Persamaan diferensial biasa dan pada perturbasi *singular* untuk masalah nilai batas pada dua titik.

Contoh 3.3. *Diberikan Masalah nilai batas dua titik untuk Persamaan diferensial biasa orde 2*

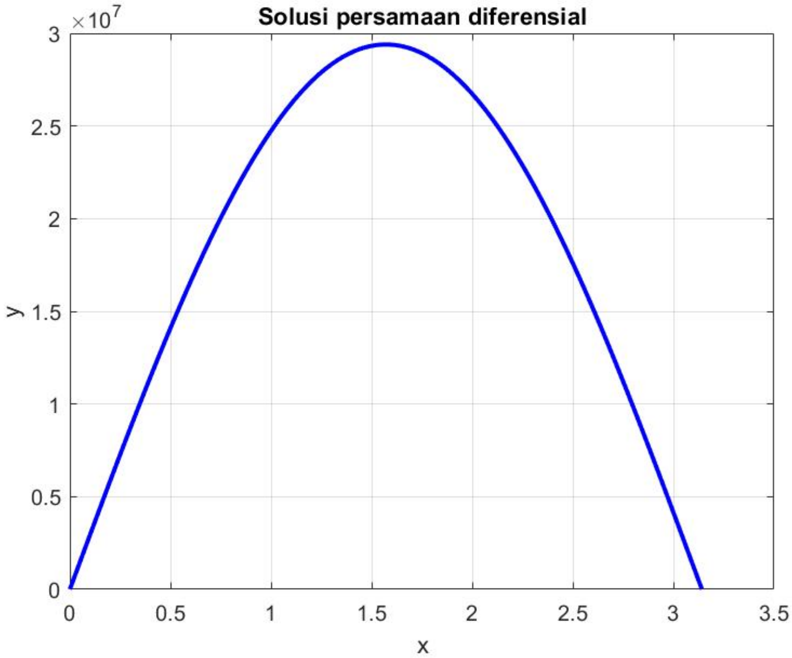
$$y''(x) + y(x) = 0, \qquad 0 \leq x \leq \pi, \tag{3.4}$$

dengan $y(0) = 0$ *dan* $y(\pi) = 1$.
Dari Persamaan (3.4) diperoleh solusi umumnya sebagai berikut

$$y(x) = \sin(x).$$

Dari Persamaan (3.4) diperoleh bahwa dengan mencari solusi umum Persamaan diferensial dan mensubstitusi kondisi batas yang diberikan untuk menemukan konstanta yang ada dalam solusi umum dapat menyelesaikan masalah nilai batas 2 titik.

Untuk menggambarkan boundary layer dari persamaan (3.4) dengan menggunakan metode perturbasi singular digunakan m-file bvppdb.m [Lampiran B]. Grafiknya sebagai berikut :



Gambar 1

Dari Gambar 1 diperoleh bahwa pada gambar tersebut, ketika nilai x mendekati π diperoleh bahwa mencapai nilai maksimum pada titik tersebut. Gambar 1 mendeskripsikan sifat dasar dari persamaan diferensial orde dua yang homogen. Dan syarat batas yang dimiliki mempengaruhi gelombang (amplitudo) pada kurva, sedangkan persamaan diferensialnya menentukan bentuk umumnya.

Selanjutnya akan diberikan contoh kasus masalah nilai batas dua titik dengan menggunakan metode perturbasi *singular*

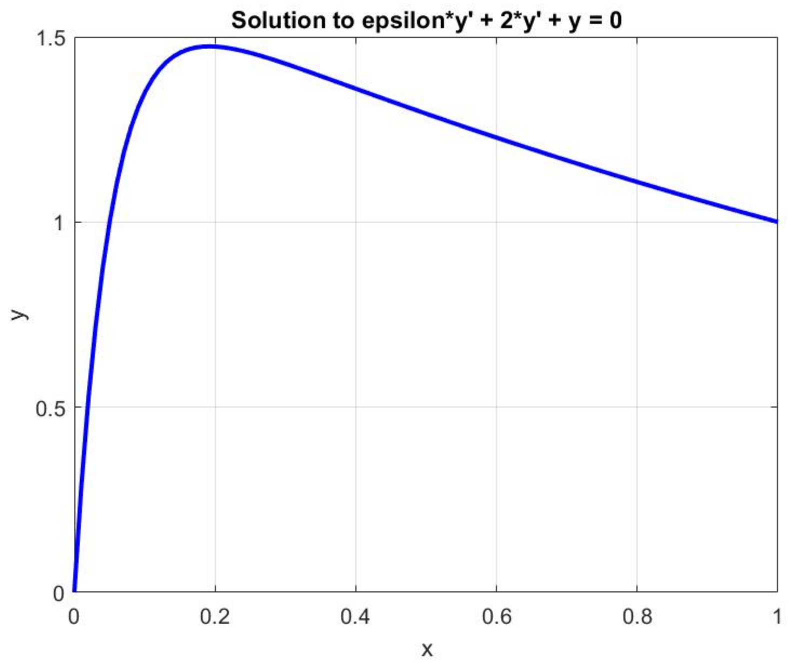
Contoh 3.4.

$$\varepsilon\ddot{y} + 2\dot{y} + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1 \tag{3.5}$$

Dari Persamaan (3.5) diperoleh solusi umumnya sebagai berikut

$$\begin{aligned} y(t) &\approx \frac{\sin(t)}{\sin(1)} + \varepsilon_* \left(\frac{4\cos(t)}{\sin(1)}\right) \\ &+ \varepsilon_* \left(\frac{\sin(1) - \left(8x(1-x^2) + 4(2x^2-1)\sqrt{1-x^2}\right)}{\sin(1)\sqrt{1-x^2}}\right)\sin(t) \\ &+ \varepsilon_* \left(-\frac{4\cos(2t)}{\sin(1)}\cos(t) + \frac{4\cos(2t)}{\sin(1)}\sin(t)\right) + \ldots . \end{aligned} \tag{3.6}$$

Dari Ekspansi (3.6) diperoleh bahwa solusi tersebut menggambarkan sifat solusi ε yang dimiliki cukup kecil atau cukup besar. Untuk menggambarkan masalah boundary layer pada sistem persamaan diferensial (3.5) dengan menggunak metode perturbasi singular digunakan m-file bvpwithps.m [Lampiran A]. Grafiknya sebagai berikut :



Gambar 2

Dari Gambar 2 diperoleh bahwa ketika $x = 0$ memenuhi syarat batas $y = 0$, begitu juga ketika $x = 1$ memenuhi syarat batas $y = 1$ sesuai dengan nilai batas yang diberikan. Pada Gambar 2 menunjukkan bahwa terdapat perubahan yang smooth dan kontinu pada nilai y seiring dengan perubahan nilai x. Perubahan yang smooth juga dipengaruhi dari nilai ε yang dipilih, yaitu $\varepsilon = 0.1$.

4. KESIMPULAN

Dalam masalah boundary layer dengan dua titik, pendekatan menggunakan metode perturbasi *singular* dapat memberikan hasil yang akurat. Berikut kesimpulan untuk masalah *Boundary Layer* dengan dua titik menggunakan metode perturbasi *singular* adalah sebagai berikut:

(1) Metode perturbasi *singular* digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial dengan singularitas yang signifikan pada salah satu titik batas. Pada

masalah *Boundary Layer* dengan dua titik, singularitas terjadi di salah satu titik batas.

(2) Dengan menggunakan metode perturbasi *singular*, solusi persamaan diferensial didekomposisi menjadi dua bagian: bagian utama dan bagian *singular*. Bagian utama mencakup solusi yang memenuhi kondisi batas di kedua titik, sedangkan bagian *singular* menangkap *singular*itas pada titik batas yang relevan.

(3) Untuk mendapatkan solusi dengan metode perturbasi *singular*, dilakukan pengembangan dalam bentuk deret asimtotik dengan parameter kecil yang mengontrol *singular*itas. Deret ini memungkinkan pendekatan terhadap solusi yang akurat dengan mengabaikan kontribusi kecil dari bagian *singular* pada titik yang jauh dari *singular*itas.

(4) Dalam masalah *Boundary Layer* dengan dua titik, solusi akhir terdiri dari bagian utama dan bagian *singular* yang diperoleh dari pengembangan deret. Bagian utama memberikan solusi yang memenuhi kondisi batas di kedua titik, sementara bagian *singular* memberikan koreksi pada solusi di sekitar titik batas yang relevan.

(5) Metode perturbasi *singular* memberikan pendekatan yang baik untuk masalah *Boundary Layer* dengan dua titik, di mana singularitas yang signifikan terjadi pada salah satu titik batas. Dengan menggunakan metode ini, kita dapat mendapatkan solusi yang akurat dan memahami bagaimana singularitas mempengaruhi solusi pada titik batas yang relevan.

Dalam kesimpulan ini, penting untuk dicatat bahwa penjelasan di atas adalah umum dan dapat bervariasi tergantung pada masalah spesifik yang sedang diselesaikan menggunakan metode perturbasi *singular*.

References

[John(2004)] John, K. Hunter, 2004, *Asymptotic Analysis and Singular Perturbation Theory*, University of California at Davis

[Kuznetsov(1998)] Kuznetsov, Y.A., 1998, *Elements of Applied Bifurcation Theory, Second Edition*, Springer-Verlaag New York, Inc., USA.

[Ferdinant (2005)] Verhulst, Ferdinant, 2005, *Methods and Applications of Singular Perturbation : Boundary Layers and Multiple Timescale Dynamics*, Springer-Verlag Heidelberg, New York, Inc., USA.

[Ferdinant(1996)] Verhulst, Ferdinant, 1996, *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag Heidelberg, New York, Inc., USA.

Anjasswari Fatona Dewi: Universitas Gadjah Mada.
E-mails: anjasswarifd@mail.ugm.ac.id

FAJAR ADI KUSUMO: Universitas Gadjah Mada.
E-mails: f_adikusumo@ugm.ac.id