Jurnal Matematika Thales (JMT): 2021 ISSN: 2715-1891
Vol. 03 No. 02

KELENGKAPAN RUANG OPERATOR LINEAR TERBATAS PADA RUANG BERNORMA KUASI

(COMPLETENESS OF BOUNDED LINEAR OPERATORS SPACES ON QUASI NORMED SPACES)

HELMI FIRDAUS*, SUPAMA

Abstract. In this paper, we discuss about bounded and continous linear operators on quasi normed spaces. We deduce that bounded linear operators spaces are quasi normed spaces and observe their completeness. At the end of this paper, we deduce dual spaces of quasi normed spaces and observe their completeness.
Keywords: Quasi normed spaces, Bounded linear operators spaces, Completeness.

Abstrak. Pada tulisan ini dibahas operator linear dengan sifat kontinu serta terbatas pada ruang bernorma kuasi. Disimpulkan bahwa ruang operator linear terbatas merupakan ruang bernorma kuasi sekaligus diselidiki kelengkapannya. Pada akhir tulisan ini, diselidiki secara khusus ruang dual dari ruang bernorma kuasi sekaligus kelengkapannya.
Kata-kata kunci: Ruang bernorma kuasi, Operator linear terbatas, Kelengkapan.

1. PENDAHULUAN

Konsep norma merupakan salah satu kajian yang terdapat dalam ilmu matematika, khususnya pada bidang analisis. Banach [2] menjelaskan bahwa untuk suatu ruang vektor V atas lapangan $\mathbb{R}$ dan θ vektor nol dari V, fungsi $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ disebut norma jika untuk setiap $x, y \in V$ serta skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ memenuhi 4 aksioma yaitu $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = \theta$, $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, dan $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. Ruang bernorma memiliki beberapa konsep pembahasan yaitu kekonvergenan barisan, barisan Cauchy, himpunan terbatas, kelengkapan, dan operator linear.

Berdasarkan konsep norma, Hyers [3] membahas konsep norma kuasi. Konsep norma kuasi memperumum konsep norma dengan mengganti ketaksamaan segitiga pada norma yang ditulis oleh Banach [2] menjadi $\|x + y\| \leq K(\|x\| + \|y\|)$ untuk suatu $K \geq 1$ dan untuk setiap $x, y \in V$ dengan V merupakan ruang vektor atas lapangan $\mathbb{R}$. Penelitian tentang norma kuasi juga dilakukan oleh Aoki [1] dan Litvak [6] yang secara terpisah membahas contoh ruang bernorma kuasi yang bukan ruang bernorma.

Konsep kekonvergenan barisan, barisan Cauchy, himpunan terbatas, dan kelengkapan di dalam ruang bernorma kuasi dibahas oleh Rano dan Bag [7]. Pembahasan ini berkaitan dengan konsep kekonvergenan barisan, barisan Cauchy, himpunan terbatas, dan kelengkapan pada ruang bernorma yang dibahas oleh Kreyszig [5]. Selanjutnya Kalton [4] menggunakan konsep norma kuasi untuk membuktikan ruang barisan terjumlah mutlak p atau ℓ^p untuk $0 < p < 1$ merupakan ruang bernorma kuasi dengan norma kuasi $|\cdot|_{q_{\ell^p}}$ dengan $|\bar{x}|_{q_{\ell^p}} = (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ untuk setiap $\bar{x} \in \ell^p$ dan meneliti ruang dualnya. Kemudian Saphory dan Delfi [9] melakukan penelitian lebih dalam terhadap penelitian Kalton [4] dengan meneliti kelengkapan dari ℓ^p untuk $0 < p < 1$.

Pada tulisan ini, penulis meneliti tentang kelengkapan ruang operator linear terbatas pada ruang bernorma kuasi dengan cara mengonstruksikan ruang operator linear terbatas pada ruang bernorma kuasi. Setelah itu, penelitian dilanjutkan dengan membuktikan ruang operator linear terbatas merupakan ruang bernorma kuasi dan terakhir dibuktikan kelengkapannya. Pada akhir tulisan ini, penulis mendefinisikan ruang dual pada ruang bernorma kuasi dan dibuktikan bahwa ruang dual pada ruang bernorma kuasi merupakan ruang bernorma lengkap.

2. RUANG BERNORMA KUASI

Pada bagian ini diberikan definisi dari ruang bernorma kuasi dan contoh dari ruang bernorma kuasi.

Definisi 2.1. [3] *Diberikan X ruang vektor atas lapangan $\mathbb{R}$ dan θ adalah vektor nol di dalam X. Fungsi bernilai real $|\cdot|_q$ pada X yang memenuhi*

(Q1). $|x|_q \geq 0$ *untuk setiap* $x \in X$,
(Q2). $|x|_q = 0$ *jika dan hanya jika* $x = \theta$,
(Q3). $|\lambda x|_q = |\lambda||x|_q$, *untuk setiap* $x \in X$ *dan* $\lambda \in \mathbb{R}$,
(Q4). *terdapat suatu konstanta* $K \geq 1$ *sedemikian sehingga untuk setiap* $x, y \in X$ *berlaku*

$$|x + y|_q \leq K\{|x|_q + |y|_q\}$$

disebut norma kuasi pada X. Pasangan $(X, |\cdot|_q)$ disebut ruang bernorma kuasi.

Contoh 2.2. *Diberikan ruang vektor $\ell^{\frac{1}{2}}$ dengan definisi*

$$\ell^{\frac{1}{2}} = \{\bar{x} = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} : x_k \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{\frac{1}{2}} < \infty\}.$$

Pasangan $(\ell^{\frac{1}{2}}, |\cdot|_{q_{\ell^{\frac{1}{2}}}})$ dengan

$$|\bar{x}|_{q_{\ell^{\frac{1}{2}}}} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

untuk setiap $\bar{x} \in \ell^{\frac{1}{2}}$ merupakan ruang bernorma kuasi.

Bukti. Cukup jelas bahwa syarat (Q1) - (Q3) berlaku. Selanjutnya dibuktikan untuk syarat (Q4). Diambil sebarang $\bar{x}, \bar{y} \in \ell^{\frac{1}{2}}$ berlaku

$$\begin{aligned}
|\bar{x}+\bar{y}|_{q_{\ell^{\frac{1}{2}}}} &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^{\frac{1}{2}}\right)^2 \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^{\frac{1}{2}}\right)^2 \\
&\leq 2\left(\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^{\frac{1}{2}}\right)^2\right) \\
&= 2\left(|\bar{x}|_{q_{\ell^{\frac{1}{2}}}} + |\bar{y}|_{q_{\ell^{\frac{1}{2}}}}\right).
\end{aligned}$$

Terdapat $K = 2$ sehingga memenuhi $|\bar{x}+\bar{y}|_{q_{\ell^{\frac{1}{2}}}} \leq K(|\bar{x}|_{q_{\ell^{\frac{1}{2}}}} + |\bar{y}|_{q_{\ell^{\frac{1}{2}}}})$ untuk setiap $\bar{x}, \bar{y} \in \ell^{\frac{1}{2}}$. Dengan kata lain pasangan $\left(\ell^{\frac{1}{2}}, |\cdot|_{q_{\ell^{\frac{1}{2}}}}\right)$ merupakan ruang bernorma kuasi. □

Berdasarkan definisi di atas, diperoleh bahwa ruang bernorma merupakan ruang bernorma kuasi. Akan tetapi untuk arah sebaliknya belum tentu berlaku. Hal ini dibuktikan dengan contoh sebagai berikut.

Contoh 2.3. *Contoh 2.2 merupakan ruang bernorma kuasi yang bukan ruang bernorma.*

Bukti. Diandaikan $(\ell^{\frac{1}{2}}, |\cdot|_{q_{\ell^{\frac{1}{2}}}})$ merupakan ruang bernorma, maka terdapat $K = 1$ sehingga $|\bar{x}+\bar{y}|_{q_{\ell^{\frac{1}{2}}}} \leq K\{|\bar{x}|_{q_{\ell^{\frac{1}{2}}}} + |\bar{y}|_{q_{\ell^{\frac{1}{2}}}}\}$ untuk setiap $\bar{x}, \bar{y} \in \ell^{\frac{1}{2}}$. Diambil $\bar{x} = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell^{\frac{1}{2}}$ dengan $x_i = 1$ untuk $i = 1$ dan $x_i = 0$ untuk $i \neq 1$ serta $\bar{y} = (y_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}$ dengan $y_i = 1$ untuk $i = 2$ dan $y_i = 0$ untuk $i \neq 2$. Diperoleh $|\bar{x}+\bar{y}|_{q_{\ell^{\frac{1}{2}}}} = 4$ dan $|\bar{x}|_{q_{\ell^{\frac{1}{2}}}} + |\bar{y}|_{q_{\ell^{\frac{1}{2}}}} = 2$. Dengan kata lain $|\bar{x}+\bar{y}|_{q_{\ell^{\frac{1}{2}}}} > |\bar{x}|_{q_{\ell^{\frac{1}{2}}}} + |\bar{y}|_{q_{\ell^{\frac{1}{2}}}}$. Kontradiksi. □

Teorema 2.4. *Jika $(X, |\cdot|_q)$ ruang bernorma kuasi dengan nilai konstanta K, maka*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right|_q \leq K^{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{n} |x_i|_q\right\} \tag{2.1}$$

untuk setiap $x_i \in X$ dan untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Bukti. Bukti cukup jelas dengan menggunakan induksi matematika. □

Selanjutnya diberikan definisi dari barisan konvergen, barisan Cauchy, himpunan terbatas dan kelengkapan berturut-turut sebagai berikut.

Definisi 2.5. [8] *Diberikan $(X, |\cdot|_q)$ ruang bernorma kuasi.*

(1) *Barisan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ dikatakan konvergen ke $x \in X$ jika $\lim_{n\to\infty} |x_n - x|_q = 0$ yaitu untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq n_0$ berlaku $|x_n - x|_q < \epsilon$.*

(2) *Barisan* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ *disebut barisan Cauchy jika* $\lim_{m,n\to\infty} |x_n - x_m|_q = 0$ *yaitu untuk setiap* $\epsilon > 0$ *terdapat* $n_0 \in \mathbb{N}$ *sehingga untuk setiap* $m, n \in \mathbb{N}$ *dengan* $m, n \geq n_0$ *berlaku* $|x_m - x_n|_q < \epsilon$*.*
(3) *Himpunan* $E \subseteq X$ *dikatakan terbatas jika terdapat bilangan real* $M > 0$ *sehingga untuk setiap* $x \in E$ *berlaku* $|x|_q \leq M$*.*
(4) $(X, |\cdot|_q)$ *dikatakan lengkap jika untuk setiap barisan Cauchy* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *di dalam* X *konvergen di dalam* X*.*

Lemma 2.6. *Diberikan ruang bernorma kuasi* $(X, |\cdot|_q)$*. Jika* $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ *himpunan vektor yang saling bebas linear di dalam* X*, maka terdapat* $C > 0$ *sedemikian sehingga untuk setiap skalar* $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$*, berlaku*

$$|\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n|_q \geq C\left(|\lambda_1| + |\lambda_2| + \cdots + |\lambda_n|\right)$$

3. RUANG OPERATOR LINEAR TERBATAS PADA RUANG BERNORMA KUASI

Pada bagian ini terlebih dahulu diberikan definisi dari operator linear pada ruang vektor.

Definisi 3.1. ([5]) *Diberikan sebarang ruang vektor* X *dan* Y *atas lapangan* $\mathbb{R}$*,* D *merupakan subruang dari* X*, dan operator* $T : D \to Y$*. Operator* T *dikatakan linear jika untuk setiap* $x, y \in D$ *dan untuk setiap* $\alpha \in \mathbb{R}$ *berlaku* $T(x + y) = T(x) + T(y)$ *dan* $T(\alpha x) = \alpha T(x)$*.*

Selanjutnya, diberikan definisi tentang terbatas dan kekontinuan dari operator linear serta beberapa sifat yang berkaitan pada ruang bernorma kuasi.

Definisi 3.2. ([5] dan [8]) *Diberikan* $(X, |\cdot|_{q_X})$ *dan* $(Y, |\cdot|_{q_Y})$ *masing-masing merupakan ruang bernorma kuasi,* D *subruang dari* X *serta operator linear* $T : D \to Y$*.* T *dikatakan terbatas jika terdapat* $C > 0$ *sedemikian sehingga untuk setiap* $x \in D$ *berlaku*

$$|T(x)|_{q_Y} \leq C|x|_{q_X}.$$

Contoh 3.3. *Diberikan ruang bernorma kuasi* $(\mathbb{R}^n, |\cdot|_{q^2})$ *dengan* $|\vec{x}|_{q^2} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^{\frac{1}{2}}\right)^2$ *untuk setiap* $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$*. Operator* $I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *dengan* $I(\vec{x}) = \vec{x}$ *untuk setiap* $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ *dengan* $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$*, merupakan operator linear terbatas.*

Bukti. Dibuktikan bahwa I operator linear. Diambil sebarang $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ berlaku $I(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} = \alpha I(\vec{x}) + \beta I(\vec{y})$. Selanjutnya, dibuktikan I terbatas. Diambil sebarang $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ berlaku $|I(\vec{x})|_{q^2} = |\vec{x}|_{q^2}$. Dengan demikian terdapat $C = 1$ sehingga untuk setiap $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ berlaku

$$|I(\vec{x})|_{q^2} \leq C|\vec{x}|_{q^2}.$$

Terbukti I merupakan operator linear terbatas $\mathbb{R}^n$. □

Definisi 3.4. ([5] dan [8]) *Diberikan* $(X, |\cdot|_{q_X})$ *dan* $(Y, |\cdot|_{q_Y})$ *masing-masing ruang bernorma kuasi,* D *subruang dari* X *serta operator linear* $T : D \to Y$. T *dikatakan kontinu di* $x \in D$ *jika untuk setiap* $\epsilon > 0$ *terdapat* $\delta > 0$ *sehingga untuk setiap* $y \in D$ *dengan sifat* $|y - x|_{q_X} < \delta$ *berlaku* $|T(y) - T(x)|_{q_Y} < \epsilon$. *Lebih lanjut,* T *dikatakan kontinu pada* D *jika* T *kontinu untuk setiap* $x \in D$.

Contoh 3.5. *Diberikan ruang bernorma kuasi* $\left(\mathbb{R}^2, |\cdot|_{q^2}\right)$ *dengan* $|\vec{x}|_{q^2} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^{\frac{1}{2}}\right)^2$ *untuk setiap* $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ *serta* $\left(\mathbb{R}^3, |\cdot|_{q^3}\right)$ *dengan* $|\vec{w}|_{q^3} = \left(\sum_{i=1}^{n} |w_i|^{\frac{1}{3}}\right)^3$ *untuk setiap* $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$. *Operator* $J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *dengan*

$$J(\vec{x}) = (x_1 + 2x_2, 3x_1, 2x_2)$$

untuk setiap $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ *merupakan operator linear kontinu pada* $\mathbb{R}^2$.

Bukti. Dibuktikan J operator linear. Diambil sebarang $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ berlaku

$$\begin{aligned} J(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) &= (\alpha x_1 + \beta y_1 + 2(\alpha x_2 + \beta y_2), 3(\alpha x_1 + \beta y_1), 2(\alpha x_2 + \beta y_2)) \\ &= (\alpha x_1 + 2\alpha x_2, 3\alpha x_1, 2\alpha x_2) + (\beta y_1 + 2\beta y_2, 3\beta y_1, 2\beta y_2) \\ &= \alpha(x_1 + 2x_2, 3x_1, 2x_2) + \beta(y_1 + 2y_2, 3y_1, 2y_2) \\ &= \alpha J(\vec{x}) + \beta J(\vec{y}) \end{aligned}$$

Selanjutnya dibuktikan J kontinu. Diambil sebarang $\epsilon > 0$ dan sebarang $\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Dipilih $\delta = \frac{\epsilon}{(1+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3})^3}$ sehingga untuk setiap $\vec{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ dengan sifat $|\vec{x} - \vec{y}|_{q^2} < \delta$ yang berakibat $|x_k - y_k| < \delta$ untuk setiap $k = 1, 2$ berlaku

$$\begin{aligned} &|J(\vec{x}) - J(\vec{y})|_{q^3} \\ &\quad = |(x_1 - y_1) + 2(x_2 - y_2), 3(x_1 - y_1), 2(x_1 - y_2)|_{q^3} \\ &\quad = \left(\sqrt[3]{|(x_1 - y_1) + 2(x_2 - y_2)|} + \sqrt[3]{|3(x_1 - y_1)|} + \sqrt[3]{|2(x_2 - y_2)|}\right)^3 \\ &\quad \leq \left(\sqrt[3]{|x_1 - y_1|} + \sqrt[3]{|2(x_2 - y_2)|} + \sqrt[3]{|3(x_1 - y_1)|} + \sqrt[3]{|2(x_2 - y_2)|}\right)^3 \\ &\quad < \left(\sqrt[3]{\delta} + \sqrt[3]{2\delta} + \sqrt[3]{3\delta} + \sqrt[3]{2\delta}\right)^3 \\ &\quad = (1 + 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3})^3(\delta) \\ &\quad = \epsilon. \end{aligned}$$

Terbukti bahwa operator linear J kontinu pada $\mathbb{R}^2$. □

Berdasarkan Definisi 3.2 dan Definisi 3.4 diperoleh teorema sebagai berikut.

Teorema 3.6. *Diberikan* $(X, |\cdot|_{q_X})$ *dan* $(Y, |\cdot|_{q_Y})$ *merupakan ruang bernorma kuasi,* D *subruang dari* X, *serta* $T : D \to Y$ *operator linear. Pernyataan berikut ekuivalen;*

(1) T *kontinu pada* D,
(2) T *kontinu di* $0_D \in D$ *dengan* 0_D *elemen nol di dalam* D, *dan*
(3) T *terbatas.*

Bukti. Cukup jelas (1) $\Rightarrow$ (2) berdasarkan definsi kontinu pada D. Selanjutnya dibuktikan (2) $\Rightarrow$ (3). Diandaikan T tidak terbatas, artinya untuk setiap $C > 0$ terdapat $x_C \in D$ sedemikian sehingga $|T(x_C)|_{q_Y} > C|x_C|_{q_X}$ Khususnya untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, terdapat $x_n \in D$ sehingga

$$|T(x_n)|_{q_Y} > n|x_n|_{q_X} \tag{3.1}$$

Jelas bahwa $x_n \neq 0_D \in D$. Selanjutnya, dibentuk untuk setiap $n \in \mathbb{N}$

$$y_n = \frac{x_n}{n|x_n|_{q_Y}}$$

sehingga diperoleh bahwa

$$|y_n|_{q_X} = \frac{1}{n}.$$

Dengan demikian $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0_D$. Akibatnya $\lim\limits_{n\to\infty} |T(y_n)|_{q_Y} = 0$. Namun berdasarkan (3.1), $|T(y_n)|_{q_Y} > 1$. Terjadi kontradiksi, sehingga berlaku T terbatas. Terakhir dibuktikan (3) $\Rightarrow$ (1). Diberikan T merupakan operator linear terbatas. Dengan kata lain, terdapat $C > 0$ sehingga $|T(x)|_{q_Y} \leq C|x|_{q_X}$ untuk setiap $x \in D$. Diambil sebarang $x \in D$ serta bilangan $\epsilon > 0$. Dipilih $\delta = \frac{\epsilon}{C}$ sehingga untuk setiap $y \in D$ dengan sifat $|y - x|_{q_X} < \delta$ berlaku

$$|T(y) - T(x)|_{q_Y} = |T(y - x)|_{q_Y} \leq C|y - x|_{q_X} < C \cdot \frac{\epsilon}{C} = \epsilon.$$

Dengan demikian diperoleh bahwa T kontinu pada D. □

Teorema 3.7. *Diberikan $(X, |\cdot|_{q_X})$ dan $(Y, |\cdot|_{q_Y})$ masing-masing ruang bernorma kuasi serta operator linear $T : X \to Y$. Jika X merupakan dimensi berhingga, maka T terbatas serta T kontinu.*

Bukti. Dimisalkan dimensi $X = n$ untuk $n \in \mathbb{N}$ dan $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ basis untuk X. Diambil sebarang $x \in X$, sehingga berlaku bahwa

$$|T(x)|_{q_Y} = \left| T\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right)\right|_{q_Y} = \left|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(x_i)\right|_{q_Y} \tag{3.2}$$

Berdasarkan Teorema 2.4, persamaan (3.2) menjadi

$$|T(x)|_{q_Y} \leq K^{n-1} \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \, |T(x_i)|_{q_Y} \tag{3.3}$$

untuk suatu $K \geq 1$. Selanjutnya, didefinisikan

$$L = K^{n-1} \max\{T(x_1), T(x_2), T(x_3), \cdots, T(x_n)\}$$

sehingga pertidaksamaan (3.3) menjadi

$$|T(x)|_{q_Y} \leq nL \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \tag{3.4}$$

Diperhatikan dari Lemma 2.6 terdapat konstanta $C > 0$ sehingga

$$|x|_{q_X} = \left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right|_{q_X} \geq C \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| . \tag{3.5}$$

Dengan demikian, dari (3.4) serta (3.5) diperoleh bahwa

$$|T(x)|_{q_Y} \leq \frac{nL}{C} |x|_{q_X} .$$

Dengan demikian T terbatas pada X. Lebih lanjut, berdasarkan Teorema 3.6, T kontinu pada X. □

Berikutnya, diberikan $(X, |\cdot|_{q_X})$ dan $(Y, |\cdot|_{q_Y})$ masing-masing merupakan ruang bernorma kuasi. Dinotasikan bahwa $B(X,Y)$ himpunan semua operator linear terbatas dari $(X, |\cdot|_{q_X})$ ke $(Y, |\cdot|_{q_Y})$. Akan ditunjukkan bahwa $B(X,Y)$ merupakan ruang vektor melalui teorema berikut.

Teorema 3.8. *Diberikan $(X, |\cdot|_{q_X})$ dan $(Y, |\cdot|_{q_Y})$ merupakan ruang bernorma kuasi. Jika $B(X,Y)$ merupakan himpunan semua operator linear terbatas dari X ke Y, maka $B(X,Y)$ merupakan ruang vektor.*

Bukti. Diambil sebarang $T_1, T_2 \in B(X,Y)$ serta skalar $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Dengan demikian $M > 0$ dan $N > 0$ sehingga untuk setiap $x \in X$ berlaku $|T_1(x)|_{q_Y} \leq M|x|_{q_X}$ dan $|T_2(x)|_{q_Y} \leq N|x|_{q_X}$. Didefinisikan operasi penjumlahan dan perkalian terhadap skalar di dalam $B(X,Y)$ yaitu $(T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x)$ dan $(\alpha_1 T_1)(x) = \alpha_1 T_1(x)$ untuk setiap $x \in X$. Cukup jelas bahwa $(\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2)$ bersifat linear. Kemudian ditunjukkan bahwa $(\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2)$ terbatas. Diambil sebarang $x \in X$ berlaku

$$\begin{aligned} |(\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2)(x)|_{q_Y} &= |\alpha_1 T_1(x) + \alpha_2 T_2(x)|_{q_Y} \\ &\leq K \left(|\alpha_1 T_1(x)|_{q_Y} + |\alpha_2 T_2(x)|_{q_Y} \right) \\ &\leq K|\alpha_1| M |x|_{q_X} + K|\alpha_2| N |x|_{q_X} \\ &= (K|\alpha_1| M + K|\alpha_2| N) |x|_{q_X} \\ &= D|x|_{q_X} \end{aligned}$$

dengan $K \geq 1$. Dengan demikian terdapat $D = (K|\alpha_1|M + K|\alpha_2|N) > 0$ sehingga $|(\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2)(x)|_{q_Y} \leq D|x|_{q_X}$ untuk setiap $x \in X$. Dengan kata lain $(\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2)$ terbatas. Dengan demikian diperoleh $(\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2) \in B(X,Y)$. Terbukti bahwa $B(X,Y)$ ruang vektor. □

Selanjutnya, diberikan teorema bahwa $B(X,Y)$ merupakan ruang bernorma kuasi.

Teorema 3.9. *Diberikan $(X, |\cdot|_{q_X})$ dan $(Y, |\cdot|_{q_Y})$ merupakan ruang bernorma kuasi serta $B(X,Y)$ ruang operator linear terbatas dari X ke Y. Jika didefinisikan fungsi $|\cdot|_{q_B}$ pada $B(X,Y)$ dengan definisi untuk setiap $T \in B(X,Y)$ berlaku*

$$|T|_{q_B} = \sup \left\{ \frac{|T(x)|_{q_Y}}{|x|_{q_X}} : x \in X, x \neq 0_X \right\},$$

maka $|\cdot|_{q_B}$ norma kuasi pada $B(X,Y)$ sehingga pasangan $(B(X,Y), |\cdot|_{q_B})$ merupakan ruang bernorma kuasi.

Bukti. Cukup jelas bahwa pendefinisian $|T|_{q_B}$ untuk setiap $T \in B(X,Y)$ memenuhi syarat (Q1) - (Q3) pada Definisi 2.1. Ditunjukkan untuk syarat (Q4) pada Definisi 2.1 terpenuhi. Diambil sebarang $T_1, T_2 \in B(X,Y)$ berlaku

$$\begin{aligned} |T_1 + T_2|_{q_B} &= \sup\left\{\frac{|T_1(x) + T_2(x)|_{q_Y}}{|x|_{q_X}} : x \in X, x \neq 0_X\right\} \\ &\leq \sup\left\{\frac{K\left(|T_1(x)|_{q_Y} + |T_2(x)|_{q_Y}\right)}{|x|_{q_X}} : x \in X, x \neq 0_X\right\} \\ &\leq K \sup\left\{\frac{|T_1(x)|_{q_Y}}{|x|_{q_X}} : x \in X, x \neq 0_X\right\} + \\ &\quad K \sup\left\{\frac{K|T_2(x)|_{q_Y}}{|x|_{q_X}} : x \in X, x \neq 0_X\right\} \\ &= K|T_1|_{q_B} + K|T_2|_{q_B} \end{aligned}$$

dengan $K \geq 1$. Dengan demikian pasangan $(B(X,Y), |\cdot|_{q_B})$ merupakan ruang bernorma kuasi. □

Teorema 3.10. *Diberikan $(X, |\cdot|_{q_X})$ dan $(Y, |\cdot|_{q_Y})$ masing-masing ruang bernorma kuasi. Untuk sebarang $T \in B(X,Y)$ jika didefinisikan fungsi $|\cdot|_{q_A}$ yaitu*

$$|T|_{q_A} = \sup\{|T(x)|_{q_Y} : x \in X, |x|_{q_X} \leq 1\}$$

maka fungsi tersebut merupakan norma kuasi pada $B(X,Y)$ serta berlaku

$$|T|_{q_B} = |T|_{q_A}.$$

Bukti. Ditunjukkan bahwa $|T|_{q_B} \geq |T|_{q_A}$. Diambil sebarang $x \in X$ dengan $|x|_{q_X} \leq 1$.

(i). Jika nilai $|x|_{q_X} = 0$, maka $x = 0_X$. Karena T linear terbatas maka $T(x) = 0_Y$, sehingga $|T(x)|_{q_Y} = 0$. Dengan demikian $|T|_{q_B} \geq |T(x)|_{q_Y}$. Berdasarkan hal tersebut diperoleh

$$\{|T(x)|_{q_Y} : x \in X, |x|_{q_X} = 0\} \tag{3.6}$$

terbatas.

(ii). Jika nilai $0 < |x|_{q_X} \leq 1$, maka $x \neq 0_X$. Dengan demikian berlaku bahwa

$$|T|_{q_B} \geq \frac{|T(x)|_{q_Y}}{|x|_{q_X}} \geq |T(x)|_{q_Y}.$$

Dengan demikian diperoleh

$$\{|T(x)|_{q_Y} : x \in X, 0 < |x|_{q_X} \leq 1\} \tag{3.7}$$

terbatas.

Dari (3.6) serta (3.7), diperoleh

$$\{|T(x)|_{q_Y} : x \in X, |x|_{q_X} \leq 1\}$$

terbatas. Akibatnya $\sup\{|T(x)|_{q_Y} : x \in X, |x|_{q_X} \leq 1\} \leq |T|_{q_B}$. Dengan demikian diperoleh $|T|_{q_B} \geq |T|_{q_A}$. Selanjutnya ditunjukkan $|T|_{q_A} \geq |T|_{q_B}$. Diambil sebarang $x \neq 0_X$, diperoleh $|x|_{q_X} \neq 0$. Selanjutnya dibentuk $\frac{x}{|x|_{q_X}} \in X$. Karena sifat T linear terbatas, maka terdapat $M > 0$ sehingga

$$\left|T\left(\frac{x}{|x|_{q_X}}\right)\right|_{q_Y} \leq M\left|\frac{x}{|x|_{q_X}}\right|_{q_X} = M.$$

Dengan demikian

$$\left\{\left|T\left(\frac{x}{|x|_{q_X}}\right)\right|_{q_Y} : x \in X, x \neq 0_X\right\} \tag{3.8}$$

terbatas. Lebih lanjut, himpunan pada (3.8) merupakan himpunan bagian dari

$$\left\{|T(x)|_{q_Y} : x \in X, |x|_{q_X} \leq 1\right\}.$$

Dengan demikian

$$\sup\left\{\left|T\left(\frac{x}{|x|_{q_X}}\right)\right|_{q_Y} : x \in X, x \neq 0_X\right\} \leq |T|_{q_A}.$$

Karena T linear maka

$$\sup\left\{\frac{|T(x)|_{q_Y}}{|x|_{q_X}} : x \in X, x \neq 0_X\right\} \leq |T|_{q_A}.$$

Dengan demikian diperoleh $|T|_{q_A} \geq |T|_{q_B}$. □

Lemma 3.11. *Diberikan $(X, |\cdot|_q)$ merupakan ruang bernorma kuasi. Jika barisan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di dalam X konvergen ke $x \in X$, maka terdapat $K \geq 1$ sehingga berlaku $|x|_q \leq K \lim_{n\to\infty} |x_n|_q$.*

Selanjutnya Lemma 3.11 digunakan untuk membuktikan kelengkapan ruang operator linear terbatas $(B(X,Y), |\cdot|_{q_B})$.

Teorema 3.12. *Diberikan $(X, |\cdot|_{q_X})$ dan $(Y, |\cdot|_{q_Y})$ merupakan ruang bernorma kuasi. Jika $(Y, |\cdot|_{q_Y})$ lengkap, maka $(B(X,Y), |\cdot|_{q_B})$ lengkap.*

Bukti. Diambil sebarang barisan Cauchy $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di $B(X,Y)$. Dengan kata lain, untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap bilangan asli $m, n \geq N$ berlaku $|T_n - T_m|_{q_B} < \epsilon$. Dengan demikian, untuk setiap $x \in X$ berlaku bahwa

$$\begin{aligned} |T_n(x) - T_m(x)|_{q_Y} &= |(T_n - T_m)(x)|_{q_Y} \\ &\leq |T_n - T_m|_{q_B} |x|_{q_X} \\ &< \epsilon |x|_{q_X} \end{aligned} \tag{3.9}$$

Dengan demikian diperoleh $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy pada Y. Karena $(Y, |\cdot|_{q_Y})$ lengkap, maka $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergen di dalam Y. Akibatnya untuk setiap $x \in X$ terdapat $y \in Y$ sehingga $\lim_{n\to\infty} T_n(x) = y$. Selanjutnya didefinisikan suatu operator $T : X \to Y$

dengan $T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$. T merupakan operator linear sebab untuk setiap $x_1, x_2 \in X$ serta skalar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ berlaku

$$\begin{aligned} T(\alpha x_1 + \beta x_2) &= \lim_{n\to\infty} T_n(\alpha x_1 + \beta x_2) \\ &= \alpha \lim_{n\to\infty} T_n(x_1) + \beta \lim_{n\to\infty} T_n(x_2) \\ &= \alpha T(x_1) + \beta T(x_2). \end{aligned}$$

Selanjutnya ditunjukkan bahwa T terbatas. Diperhatikan untuk setiap $x \in X$ berlaku $\lim_{m\to\infty} T_m(x) = T(x)$. Menggunakan Lemma 3.11 serta berdasarkan (3.9), untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq N$ diperoleh

$$\begin{aligned} |T_n(x) - T(x)|_{q_Y} &= \left|T_n(x) - \lim_{m\to\infty} T_m(x)\right|_{q_Y} \\ &= \left|\lim_{m\to\infty} (T_n(x) - T_m(x))\right|_{q_Y} \\ &\leq K \lim_{m\to\infty} |T_n(x) - T_m(x)|_{q_Y} \\ &\leq K \lim_{m\to\infty} |T_n - T_m|_{q_B} |x|_{q_X} \\ &< K\epsilon |x|_{q_X} \end{aligned} \tag{3.10}$$

untuk suatu $K \geq 1$ dan untuk setiap $x \in X$. Akibatnya operator $(T_n - T)$ merupakan operator linear terbatas untuk setiap $n \geq N$. Karena T_n merupakan operator linear terbatas untuk setiap $n \geq N$, sehingga $T = T_n - (T_n - T)$ operator linear terbatas. Dengan demikian $T \in B(X, Y)$. Terakhir, ditunjukkan bahwa barisan $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergen ke T di dalam $B(X, Y)$. Diperhatikan bahwa dari (3.10), khusus untuk setiap $x \in X$ dengan $x \neq 0_X$ berlaku

$$\frac{|T_n(x) - T(x)|_{q_Y}}{|x|_{q_X}} < K\epsilon$$

untuk setiap $n \geq N$ serta untuk suatu $K \geq 1$. Dengan kata lain

$$\left\{ \frac{|T_n(x) - T(x)|_{q_Y}}{|x|_{q_X}} : x \in X, x \neq 0_X \right\}$$

terbatas sehingga mempunyai supremum dengan

$$\sup \left\{ \frac{|(T_n - T)(x)|_{q_Y}}{|x|_{q_X}} : x \in X, x \neq 0_X \right\} < K\epsilon$$

untuk setiap $n \geq N$ dan untuk suatu $K \geq 1$. Akibatnya

$$|T_n - T|_{q_B} = \sup \left\{ \frac{|T_n(x) - T(x)|_{q_Y}}{|x|_{q_X}} : x \in X, x \neq 0_X \right\} < K\epsilon.$$

Dengan demikian, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergen ke T di dalam $B(X, Y)$. Dengan kata lain $(B(X, Y), |\cdot|_{q_B})$ lengkap. $\square$

Definisi 3.13. *Diberikan $(X, |\cdot|_{q_X})$ dan $(Y, |\cdot|_{q_Y})$ masing-masing ruang bernorma kuasi linear dan $(B(X, Y), |\cdot|_{q_B})$ ruang operator linear terbatas dari X ke Y. Ruang $(B(X, Y), |\cdot|_{q_B})$ disebut ruang dual jika $Y = \mathbb{R}$ dan $|\cdot|_{q_B} = |\cdot|$.*

Contoh 3.14. *Diberikan* $(\mathbb{R}^3, |\cdot|_{q^3})$ *ruang bernorma kuasi dengan*

$$|\vec{x}|_{q^3} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^{\frac{1}{3}}\right)^3 .$$

Fungsional $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *dengan* $H(\vec{x}) = x_1 + x_2 + x_3$ *merupakan fungsional linear terbatas pada* $\mathbb{R}^3$.

Bukti. Cukup mudah dibuktikan bahwa H merupakan fungsional linear pada $\mathbb{R}^3$. Diambil sebarang $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ berlaku

$$\begin{aligned} H(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) &= \alpha x_1 + \beta y_1 + \alpha x_2 + \beta y_2 + \alpha x_3 + \beta y_3 \\ &= \alpha(x_1 + x_2 + x_3) + \beta(y_1 + y_2 + y_3) \\ &= \alpha H(\vec{x}) + \beta H(\vec{y}). \end{aligned}$$

Selanjutnya ditunjukkan bahwa H terbatas pada $\mathbb{R}^3$. Diambil sebarang $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ berlaku

$$|H(\vec{x})| = |x_1 + x_2 + x_3| \leq (\sqrt[3]{|x_1| + |x_2| + |x_3|})^3 \leq (\sqrt[3]{|x_1|} + \sqrt[3]{|x_2|} + \sqrt[3]{|x_3|})^3 = |\vec{x}|_{q^3}$$

□

Teorema 3.15. *Diberikan* $(X, |\cdot|_q)$ *ruang bernorma kuasi. Ruang dual* $(B(X, \mathbb{R}), |\cdot|)$ *merupakan ruang bernorma kuasi lengkap.*

Bukti. Alur bukti mengikuti pada bukti Teorema 3.12. □

4. PENUTUP

Pada tulisan ini, hanya dikonstruksikan ruang operator linear terbatas pada ruang bernorma kuasi dan dibuktikan sifat lengkapnya. Untuk penelitian selanjutnya, disarankan untuk meneliti sifat refleksif dari ruang operator linear terbatas pada ruang bernorma kuasi.

Referensi

[1] Aoki, T., 1942, Locally Bounded Linear Topological Spaces, *Proceedings of Imperial Academy Tokyo*, 18, pp. 588-594.
[2] Banach, S., 1932, *Théorie des Opérations Linéaries*, Chelsea, New York.
[3] Hyers, D.H., 1939, Locally Bounded Linear Topological Spaces, *Revista de Ciencias*, 41, pp. 555-574.
[4] Kalton, N., Peck, N., and Roberts, J., 1985, *An F-Space Sampler*, Cambridge University Press, Cambridge.
[5] Kreyszig, E., 1979, *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley and Sons. Inc., Canada.
[6] Litvak, Alexander E., 1998, The Extension of the Finite Dimensional Version of Krivine's Theorem to Quasi-Normed Spaces, *Convex Geometric Analysis*, 34, pp. 139-148.
[7] Rano, G., and Bag, T., 2014, Finite Dimensional Quasi-Normed linear space, *The Journal of Fuzzy Mathematics*, 22(2), pp. 669-676.

[8] Rano, G., and Bag, T., 2015, Bounded Linear Operators in Quasi-Normed Linear Space, *Journal of The Egyptian Mathematical society*, 23, pp. 303-308.
[9] Saphory, R.A., and Delfi, J.K., 2007, Quasi-Banach Space for the Sequence Space ℓ^p where $0 < p < 1$, *Journal of Collage of Education*, 3, pp. 285-295.

HELMI FIRDAUS* (Penulis Korespondensi)
Departemen Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Gadjah Mada, Indonesia
saya.helmifirdaus@gmail.com

SUPAMA
Departemen Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Gadjah Mada, Indonesia
supama@ugm.ac.id