Jurnal Matematika Thales (JMT): 2020 ISSN: 2715-1891
Vol. 02 No. 01

SISTEM PERSAMAAN LINEAR *MAX-PLUS* DAN TERAPANNYA PADA SISTEM JARINGAN KERETA API

(*MAX-PLUS* LINEAR EQUATION SYSTEM AND ITS APPLICATION ON RAILWAY NETWORK SYSTEM)

ANDRO KURNIAWAN*, ARI SUPARWANTO

Abstrak. Aljabar *Max-Plus* adalah himpunan $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ dengan $\mathbb{R}$ adalah himpunan semua bilangan real yang dilengkapi dengan operasi maksimum dan penjumlahan. Aljabar *Max-Plus* dapat memodelkan beberapa jenis Sistem Kejadian Diskrit (SKD) yang tidak linear pada aljabar biasa menjadi berbentuk linear pada aljabar *Max-Plus*, sehingga dapat dilakukan analisis lebih lanjut. Jenis SKD yang akan berbentuk linear apabila dimodelkan dalam bentuk aljabar *Max-Plus* khususnya SKD yang hanya terdapat sinkronisasi tanpa adanya konkurensi seperti sistem jaringan kereta api, sistem produksi, lampu lalu lintas, dll. Pada penelitian ini dibahas tentang penerapan persamaan linear *Max-Plus* pada sistem jaringan kereta api di DAOP VI Yogyakarta dalam pembuatan jadwal kereta api yang periodik dan melibatkan sinkronisasi antar kereta. Hasil dari penelitian ini yaitu diperoleh model sistem jaringan kereta api DAOP VI Yogyakarta dalam bentuk $\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = \tilde{\mathbf{A}} \otimes \tilde{\mathbf{x}}(k)$ yang kemudian digunakan untuk menentukan periode keberangkatan dan waktu keberangkatan awal kereta api. Periode keberangkatan diperoleh dari nilai eigen (λ) dari matriks $\tilde{\mathbf{A}}$ dan waktu keberangkatan awal diperoleh dari vektor eigen yang bersesuaian dengan λ. Dari hasil perhitungan diperoleh periode keberangkatan kereta adalah $T = 588$ menit.

Kata-kata kunci: aljabar *Max-Plus*, jadwal, kereta api, sinkronisasi.

2010 Mathematics Subject Classification: 93C65, 15A80, 15A16

Abstract. *Max-Plus* algebra is the set of $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ with $\mathbb{R}$ is the set of all real numbers that are equipped with maximum operation and addition. *Max-Plus* algebra is able to model several types of Discrete Event System (DES) which are nonlinear in conventional algebra to be linear in *Max-Plus* algebra, so we can do further analysis of the system. Types of DES will be linear in the form of *Max-Plus* algebra which only synchronizes without any concurrency such as railway network systems, production systems, traffic lights, etc. This research discusses the application of the linear *Max-Plus* equation in the train schedules and involves synchronization between trains. The result of this study are obtained DAOP VI Yogyakarta rail network system model in the form of $\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = \tilde{\mathbf{A}} \otimes \tilde{\mathbf{x}}\ (k)$ which is then used to determine the departure period and the time of initial train departure. The departure period is obtained from the eigenvalue (λ) from the $\tilde{\mathbf{A}}$ matrix and the initial departure is obtained from the eigenvector corresponding to λ. The calculation shows that the train departure period is $T = 588$ minutes.

Keywords: *Max-Plus* algebra, schedules, train, synchronization.

1. PENDAHULUAN

Aljabar *Max-Plus* dapat memodelkan secara efisien beberapa SKD, khususnya SKD dengan syarat kesinkronan tanpa konkurensi. Salah satu SKD dengan syarat kesinkronan tanpa konkurensi adalah jaringan kereta api. Penelitian sejenis tentang sistem kereta api adalah yang dilakukan oleh [4]. Pada penelitian tersebut, Goverde meneliti tentang kestabilan jadwal kereta api di Belanda yang memperhatikan sinkronisasi dan jadwal berulang secara periodik.

Sejalan dengan penelitian tersebut, pada tulisan ini pemodelan pada sistem jaringan kereta api mengacu kepada pemodelan yang dilakukan oleh Goverde dan melibatkan banyak stasiun dan keberangkatan kereta, sehingga akan diperoleh sistem linier *Max-Plus* orde tinggi. Pada penelitian ini menggunakan suatu teknik yang dapat mentransformasikan sistem linier *Max-Plus* orde tinggi ke dalam bentuk sistem linier *Max-Plus* berorde 1 sebagaimana yang terdapat pada [10]. Kemudian mencari nilai dan vektor eigen dari matriks yang bersesuaian dengan sistem tersebut. Dari nilai dan vektor eigen tersebut dirancang sebuah jadwal sistem jaringan kereta api.

2. ALJABAR *MAX-PLUS*

2.1 Pengertian dan Sifat Dasar Aljabar *Max-Plus*

Aljabar *Max-Plus* adalah himpunan $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ dengan $\mathbb{R}$ adalah himpunan semua bilangan real yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dinotasikan dengan $\oplus$ dan operasi perkalian yang dinotasikan dengan $\otimes$ dengan definisi sebagai berikut:

$$a \oplus b = \max\{a, b\} \text{ dan } a \otimes b = a + b$$

untuk $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Selanjutnya $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ dinotasikan dengan $\mathbb{R}_{max}$ dan $-\infty$ dinotasikan dengan ε.

Berikut diberikan lemma tentang beberapa sifat dasar pada aljabar *Max-Plus*.

Lemma 2.1 [6] *Untuk semua $x, y, z \in \mathbb{R}_{max}$ berlaku :*

(1) Sifat assosiatif.

(2) Sifat komutatif.

(3) Sifat distributif.

(4) $\varepsilon = -\infty$ adalah elemen nol.

(5) $e = 0$ elemen satuan atau unit.

(6) Memiliki invers terhadap perkalian.

(7) Elemen $\varepsilon = -\infty$ adalah elemen penyerap.

(8) Idempoten terhadap penjumlahan.

2.2 Matriks atas Aljabar *Max-Plus*

Himpunan matriks $m \times n$ untuk $m, n \in \mathbb{N}$ atas $\mathbb{R}_{max}$ dinotasikan dengan $\mathbb{R}_{max}^{m \times n}$. Entri baris ke i dan kolom ke j dari matriks $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{max}^{m \times n}$ dinotasikan dengan a_{ij} atau $[\mathbf{A}]_{ij}$ dengan $i \in \{1, 2, ..., m\}$ dan $j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Definisi 2.2 [6]

(1) Untuk $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}_{max}^{m \times n}$ didefinisikan $\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}_{max}^{m \times n}$ dengan:

$$[\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B}]_{ij} = \boldsymbol{A}_{ij} \oplus \boldsymbol{B}_{ij} = \max(\boldsymbol{A}_{ij}, \boldsymbol{B}_{ij}).$$

(2) Untuk $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}_{max}^{m \times n}$ dan $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}_{max}^{n \times k}$ didefinisikan $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}_{max}^{m \times k}$ dengan:

$$[\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}]_{ij} = \bigoplus_{l=1}^{n} (a_{il} \otimes b_{lj}) = \max_{l \in \{1,2,...,n\}} (a_{il} + b_{lj}).$$

(3) Transpos dari matriks dinotasikan dengan $\boldsymbol{A}^T$ dan secara khusus dalam Aljabar Max-Plus didefinisikan $[\boldsymbol{A}^T]_{ij} = [\boldsymbol{A}]_{ji}$.

(4) Matriks identitas pada aljabar Max-Plus berukuran $n \times n$ dinotasikan dengan $\boldsymbol{I}_n$, didefinisikan sebagai berikut:

$$[\boldsymbol{I}_n]_{ij} = \begin{cases} e, & \textit{jika } i = j \\ \varepsilon, & \textit{jika } i \neq j \end{cases}$$

(5) Matriks nol pada aljabar Max-Plus adalah matriks $\mathcal{E}$ dengan definisi $[\mathcal{E}]_{ij} = \varepsilon$ untuk setiap $i \in \{1, 2, ..., m\}$ dan setiap $j \in \{1, 2, ..., n\}$.

(6) Untuk matriks persegi dan bilangan bulat positif k, pangkat ke-k pada $\boldsymbol{A}$ dinotasikan dengan $\boldsymbol{A}^{\otimes k}$ didefinisikan:

$$\boldsymbol{A}^{\otimes k} = \underbrace{\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{A} \otimes ... \otimes \boldsymbol{A}}_{k\ kali}.$$

Untuk k=0, $\boldsymbol{A}^{\otimes 0} = \boldsymbol{I}_n$.

(7) *Untuk sebarang matriks* $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}_{max}^{m \times n}$ *dan sebarang skalar* $\alpha \in \mathbb{R}_{max}$, $\alpha \otimes \boldsymbol{A}$ *didefinisikan sebagai berikut:*

$$[\alpha \otimes \boldsymbol{A}]_{ij} = \alpha \otimes [\boldsymbol{A}]_{ij}.$$

2.3 Graf pada Aljabar *Max-Plus*

Pada bagian ini akan dijelaskan mengenai graf dalam aljabar *Max-Plus* yang diambil dari [2], [5], dan [8].

Suatu graf G didefinisikan sebagai suatu pasangan terurut (V, E), dengan V suatu himpunan berhingga titik (*vertex*) dan E himpunan pasangan titik. Elemen dari E disebut sisi (*edge*). Suatu graf berarah (*directed graph*) $\mathcal{G}$ didefinisikan sebagai suatu pasangan terurut $(\mathcal{V}, \mathcal{D})$, dengan $\mathcal{V}$ suatu himpunan berhingga titik dan $\mathcal{D}$ suatu himpunan pasangan terurut titik. Elemen dari $\mathcal{D}$ disebut sebagai busur (*arc*). Suatu lintasan (*path*) dengan panjang $(l-1)$ dalam $\mathcal{G}$ adalah suatu barisan berhingga busur $(i_1, i_2), (i_2, i_3), ..., (i_{l-1}, i_l)$ dengan $(i_k, i_{k+1}) \in \mathcal{D}$ untuk suatu $l \in \mathbb{N}$ dan $k = 1, 2, ..., l-1$ dan lintasan dengan panjang l dinotasikan dengan $|p|_l$. Lintasan direpresentasikan dengan $i_1 \to i_2 \to ... \to i_l$. Titik i_1 disebut titik awal lintasan dan titik i_l disebut titik akhir lintasan.

Graf $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{D})$ dengan $\mathcal{V} = \{1, 2, ..., n\}$ disebut sebagai graf berarah berbobot jika untuk setiap $i, j \in \mathcal{V}$ terdapat hubungan antara $w \in \mathbb{R}_{max}$ dan $(i, j) \in \mathcal{D}$. Lebih lanjut, w disebut bobot (*weight*) dari panah (i, j).

Menurut [2], untuk setiap matriks $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$ dapat dibentuk suatu graf yang disebut graf *precedence* dari $\mathbf{A}$ yang didefiniskan sebagai berikut.

Definisi 2.3 *Misalkan* $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$. *Graf precedence dari* $\boldsymbol{A}$ *adalah suatu graf berarah berbobot dengan titik-titik 1,2,...,n dan panah* j, i *dengan bobot* a_{ij} *untuk* $a_{ij} \neq \varepsilon$.

2.4 Nilai Eigen dan Vektor Eigen pada Aljabar *Max-Plus*

Berikut ini pengertian nilai eigen dan vektor eigen suatu matriks pada aljabar *Max-Plus* mengacu pada [3].

Definisi 2.4 *Diberikan* $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$. *Jika terdapat* $\lambda \in \mathbb{R}_{max}$ *dan* $v \in \mathbb{R}_{max}$ *dengan* $v \neq \mathcal{E}$ *sedemikian sehingga* $\boldsymbol{A} \otimes v = \lambda \otimes v$, *maka* λ *disebut nilai eigen matriks* $\boldsymbol{A}$ *dan* v *disebut vektor eigen yang bersesuaian dengan* λ *dari matriks* $\boldsymbol{A}$.

Menurut [1], untuk setiap matriks $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ memiliki paling sedikit satu nilai eigen. Berikut ini diberikan algoritma untuk menentukan nilai eigen dan vektor eigen matriks $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ menurut [9]. Lebih lanjut, algoritma tersebut disebut algoritma *Power*. Algoritma *Power* menggunakan bentuk persamaan linear

$$x(k+1) = \mathbf{A} \otimes x(k), k = 0, 1, 2, \cdots . \tag{2.1}$$

Berikut ini adalah langkah-langkah pada algoritma *Power*:

(1) diberikan nilai awal $x(0) \neq (\varepsilon, \varepsilon, ..., \varepsilon)^T$;

(2) dilakukan iterasi pada (2.1) sehingga terdapat bilangan bulat p dan q dengan $p > q \geq 0$ serta bilangan real c sehingga terjadi suatu perilaku periodik atau memenuhi persamaan $x(p) = c \otimes x(q)$;

(3) dihitung nilai eigen $\lambda = \frac{c}{p-q}$;

(4) dihitung vektor eigen

$$\mathbf{v} = \bigoplus_{i=1}^{p-q} (\lambda^{\otimes(p-q-i)} \otimes x(q+i-1)).$$

3. SISTEM PERSAMAAN LINEAR *MAX-PLUS*

Sistem linear *Max-Plus* adalah sebuah sistem linear yang mendeskripsikan Sistem Kejadian Diskrit (SKD), dengan *state*-nya dideskripsikan oleh persamaan rekursif pada aljabar *Max-Plus*. Secara umum sistem linear *Max-Plus* berbentuk:

$$\mathbf{x}(k) = \bigoplus_{m=0}^{M} \mathbf{A}_m \mathbf{x}(k-m) \oplus \mathbf{B}u(k)$$

dengan $x(.) \in \mathbb{R}_{max}^{n\times 1}$ adalah vektor *state* dan $u(.) \in \mathbb{R}_{max}^{r\times 1}$ adalah vektor input. Vektor *state* dan vektor input bergantung kepada $k \in \mathbb{N}$ yang menyatakan kejadian berurutan. Matriks pada sistem (yakni $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_p, \mathbf{B}$) adalah state matriks $\mathbf{A}_l \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ dan matriks input $\mathbf{B} \in \mathbb{R}_{max}^{n\times r}$. Vektor state $x(k)$ adalah vektor dari waktu kejadian yang bersesuaian dengan kejadian ke-k.

Diperhatikan untuk suatu matriks $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$, dapat dibuat matriks $\mathbf{A}^+$ yang didefinisikan oleh

$$\mathbf{A}^+ = \bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathbf{A}^{\otimes k}.$$

Elemen $[\mathbf{A}^{\otimes k}]_{ij}$ merupakan bobot maksimum dari semua *path* dengan panjang k dari titik j ke titik i, sehingga $[\mathbf{A}^+]_{ij}$ merupakan bobot maksimum dari semua *path* dari titik j ke titik i, dengan kata lain dapat disimpulkan sebagai berikut:

$$[\mathbf{A}^+]_{ij} = \max\left\{[\mathbf{A}^{\otimes k}]_{ij} : k \geq 1\right\}.$$

Teorema 3.1 [8] *Misalkan* $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ *sedemikian hingga setiap sirkuit di graf precedence* $\mathcal{G}(\boldsymbol{A})$ *mempunyai bobot sirkuit rata-rata kurang dari atau sama dengan* e *(tak positif), maka berlaku*

$$\boldsymbol{A}^{+} = \bigoplus_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{A}^{\otimes k} = \boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{A}^{\otimes 2} \oplus ... \oplus \boldsymbol{A}^{\otimes n} \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}. \tag{3.1}$$

Berdasarkan Persamaan (3.1), untuk sebarang $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ didefinisikan suatu matriks $\mathbf{A}^*$ sebagai berikut

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{I}_n \oplus \mathbf{A}^{+} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^{\otimes k}. \tag{3.2}$$

Diperhatikan untuk setiap $\mathbf{A}$ dengan graf $\mathcal{G}(\mathbf{A})$ hanya mempunyai bobot sirkuit tak positif, berdasarkan Teorema 3.1 dapat dibentuk $\mathbf{A}^{+}$ yang kemudian melalui $\mathbf{A}^{+}$ dapat didefinisikan $\mathbf{A}^*$ seperti pada Persamaan (3.2). Sehingga $\mathbf{A}^*$ ada untuk setiap $\mathbf{A}$ dengan graf $\mathcal{G}(\mathbf{A})$ hanya mempunyai bobot sirkuit tak positif. Dalam kondisi yang sama pada Teorema 3.1, $\mathbf{A}^*$ dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan berikut

$$\mathbf{A}^* = \bigoplus_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}^{\otimes k}.$$

Untuk selanjutnya notasi tersebut akan digunakan untuk menyelesaikan persamaan $\mathbf{x} = \big(\mathbf{A} \otimes \mathbf{x}\big) \oplus \mathbf{b}$ dengan $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ dan $\mathbf{b} \in \mathbb{R}_{max}^{n\times 1}$.

Teorema 3.2 [5] *Misalkan* $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ *dan* $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}_{max}^{n\times 1}$ *dan jika bobot sirkuit rata-rata dari* $\mathcal{G}(\boldsymbol{A})$ *adalah kurang dari atau sama dengan* e*, maka* $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^* \otimes \boldsymbol{b}$ *adalah penyelesaian dari persamaan* $\boldsymbol{x} = \big(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{x}\big) \oplus \boldsymbol{b}$.

Pada sistem linear *Max-Plus* homogen, tidak memiliki input. Dengan kata lain $\mathbf{B} = \mathcal{E}$. Pada kasus seperti ini persamaan rekursifnya adalah

$$\mathbf{x}(k) = \bigoplus_{m=0}^{M} \mathbf{A}_m \otimes \mathbf{x}(k-m). \tag{3.3}$$

Persamaan (3.3) merupakan persamaan rekurensi orde $(M+1)$. Sebagai mana terdapat pada [10], persamaan tersebut dapat ditransformasi ke dalam bentuk rekurensi orde-1 seperti

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A} \otimes \mathbf{x}(k).$$

Perlu ditunjukan terlebih dahulu bahwa $\mathbf{A}_0$ pada Persamaaan (3.3) mempunyai bobot sirkuit rata-rata kurang dari atau sama dengan e dengan kata lain tidak mempunyai sirkuit sama sekali. Berdasarkan Teorema 3.1 jika $\mathbf{A}_0$ mempunyai sirkuit dengan bobot kurang dari atau sama dengan e, maka

$$\mathbf{A}_0^* = \bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathbf{A}_0^{\otimes i}.$$

Kemudian dimisalkan

$$\mathbf{b}(k) = \bigoplus_{m=1}^{M} \mathbf{A}_m \otimes \mathbf{x}(k-m),$$

maka Persamaan (3.3) dapat dikonstruksi ulang menjadi persamaan berikut,

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}_0 \otimes \mathbf{x}(k) \oplus \mathbf{b}(k). \tag{3.4}$$

Berdasarkan Teorema 3.2, maka penyelesaian Persamaan (3.4) dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k) &= \mathbf{A}_0^* \otimes \mathbf{b}(k) \\ &= \mathbf{A}_0^* \otimes \Big((\mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{x}(k-1)) \oplus \cdots \oplus ((\mathbf{A}_M \otimes \mathbf{x}(k-M)) \Big) \\ &= \Big(\mathbf{A}_0^* \otimes \mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{x}(k-1) \Big) \oplus ... \oplus \Big(\mathbf{A}_0^* \otimes \mathbf{A}_M \otimes \mathbf{x}(k-M) \Big). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Langkah terakhir, mentransformasikan Persamaan (3.5) ke dalam bentuk persamaan rekurensi orde-1, yaitu dengan terlebih dahulu memisalkan

$$\tilde{\mathbf{x}}(k) = \big[\mathbf{x}(k-1), \mathbf{x}(k-2), ..., \mathbf{x}(k-M) \big]^T$$

dan

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_0^* \otimes A_1 & \mathbf{A}_0^* \otimes A_2 & ... & ... & \mathbf{A}_0^* \otimes A_M \\ \mathbf{I}_n & \mathcal{E} & ... & ... & \mathcal{E} \\ \mathcal{E} & \mathbf{I}_n & \ddots & ... & \mathcal{E} \\ \dots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{E} & \mathcal{E} & ... & \mathbf{I}_n & \mathcal{E} \end{pmatrix}.$$

Didapatkan persamaan rekursif orde-1 sebagai berikut,

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = \tilde{\mathbf{A}} \otimes \tilde{\mathbf{x}}(k), \tag{3.6}$$

$k = 0, 1, 2, \cdots$, dengan

$$\tilde{\mathbf{x}}(k) = \big[\mathbf{x}(k-1) \big]^T = \begin{pmatrix} x_1(k-1) \\ x_2(k-1) \\ \vdots \\ x_{238}(k-1) \end{pmatrix}.$$

4. TERAPAN PADA SISTEM JARINGAN KERETA API

4.1 Pemodelan Sistem Jaringan Kereta Api

Dalam pemodelan sistem jaringan kereta api diasumsikan bahwa suatu sistem jaringan kereta api beroperasi dengan suatu jadwal keberangkatan dari semua kereta secara periodik dengan interval atau periode T satuan waktu. Periode T sama untuk semua kereta. Selanjutnya diasumsikan semua waktu perjalanan diketahui tetap. Hal ini supaya semua kereta tidak boleh mempercepat lajunya atau memperlambat lajunya sehingga menyebabkan atau membangkitkan keterlambatan. Asumsi selanjutnya adalah suatu kereta api selekas mungkin berangkat jika semua syarat telah terpenuhi. Selanjutnya, suatu kereta tidak boleh berangkat sebelum jadwal keberangkatan. Diasumsikan bahwa distribusi jumlah kereta api pada setiap lintasan atau jalur adalah tetap.

Terdapat beberapa kendala yang harus terpenuhi oleh suatu kereta api adalah sebagai berikut.

(1) Kereta api tidak boleh berangkat sebelum jadwalnya. Hal tersebut memberikan suatu kendala

$$x_i(k) \geq d_i(k) \tag{4.1}$$

dengan $d_i(k)$ adalah jadwal keberangkatan kereta i pada periode k.
Pada jadwal keberangkatan kereta api yang periodik dengan periode T, jadwal dari keberangkatan kereta i dalam periode berturut-turut $k \in \mathbb{N}$ diberikan oleh

$$d_i(k) = d_i(0) + k.T$$

dengan $d_i(0) = d_i^0 \in [0, T)$ adalah jadwal mula-mula. Dalam aljabar *Max-Plus* dapat ditulis $d_i(k) = d_i(0) \otimes T^k$.

(2) Waktu $x_i(k)$ bergantung pada kereta sebelumnya yang melintasi jalur tersebut, apakah kereta j sebelumnya berangkat pada periode k dari stasiun sebelumnya akan menjadi kereta i yang berangkat pada periode k atau $k+1, k+2, ...$ dan seterusnya, sehingga diperoleh kendala

$$x_i(k) \geq a_{ij} + x_j(k - \mu_{ij}), \tag{4.2}$$

dengan x_j adalah keberangkatan pada stasiun sebelumnya, $a_{ij} = t_{ij}^{run} + t_{ij}^{dwell}$ adalah jumlah waktu di perjalanan (t_{ij}^{run}) dari stasiun S_j ke stasiun S_i dan t_{ij}^{dwell} adalah waktu minimum bagi penumpang untuk turun atau tetap dalam kereta. Sedangkan $\mu_{ij} \in \mathbb{N}_0$ adalah periode *delay* antara keberangkatan x_j dan x_i. Periode delay μ_{ij} diperoleh dari: jika kereta api j berangkat pada suatu periode $k \in \mathbb{N}_0$ pada $d_j(k)$ maka kemungkinan kereta api tersebut akan berangkat dari stasiun S_i pada $d_i(k + \mu_{ij})$, dengan μ_{ij} diperoleh dari

$$
\begin{aligned}
\mu_{ij} &= \min\Big\{l \in \mathbb{N}_0 | d_i(k) + l.T \geq d_j(k) + a_{ij}\Big\} \\
&= \min\Big\{l \in \mathbb{N}_0 | d_i^0 + k.T + l.T \geq d_j^0 + k.T + a_{ij}\Big\} \\
&= \min\Big\{l \in \mathbb{N}_0 | d_i^0 + l.T \geq d_j^0 + a_{ij}\Big\} \\
&= \min\left\{l \in \mathbb{N}_0 | l \geq \frac{d_j^0 - d_i^0 + a_{ij}}{T}\right\}.
\end{aligned}
$$

Diperoleh $\mu_{ij} = \left\lceil \dfrac{a_{ij} + d_j^0 - d_i^0}{T} \right\rceil$, dengan $\lceil a \rceil$ adalah bilangan bulat terkecil yang tidak kurang dari a. Apabila $\mu_{ij} = 0$ berarti x_i dan x_j berangkat pada periode yang sama, jika $\mu_{ij} \geq 0$ berarti x_i dan x_j berangkat pada periode yang berbeda dengan selisih periode sebesar μ_{ij}.

(3) Kereta api i harus menunggu satu atau lebih kereta yang akan melakukan transfer penumpang dengan kereta i. Hal tersebut memberikan kendala

$$x_i(k) \geq a_{im} + x_m(k - \mu_{im}) \tag{4.3}$$

dengan m adalah kereta-kereta api yang akan memberikan transfer penumpang kepada kereta x_i dan $a_{im} = t_{im}^{run} + t_{im}^{transfer}$ adalah jumlahan antara waktu di perjalanan t_{im}^{run} dari stasiun S_m ke stasiun S_i dan $t_{im}^{transfer}$ adalah waktu transfer minimum dari kereta x_m ke kereta x_i.

(4) Suatu kereta tidak bisa berangkat jika pada jalur yang akan dituju ada kereta lain yang menuju arah yang sama, maka perlu ada jeda waktu sebelum kereta tersebut berangkat agar tidak bertabrakan. Oleh karena itu, diperoleh kendala

$$x_i(k) \geq a_{in} + x_n(k - \mu_{in}) \tag{4.4}$$

dengan a_{in} adalah waktu minimum setelah keberangkatan x_n sebelum x_i berangkat. Kendala tersebut juga berlaku jika pada waktu tersebut ada kereta lain pada jalur tersebut yang berlawanan arah dengan arah keberangkatan x_i.

Kendala (4.1), (4.2), (4.3), dan (4.4) merupakan kendala atau syarat yang harus dipenuhi oleh sebuah kereta api sebelum berangkat. Selanjutnya, syarat-syarat tersebut akan dinyatakan dalam bentuk aljabar *Max-Plus*. Oleh karena sebuah kereta api segera berangkat jika semua syarat atau kendala telah terpenuhi, maka diperoleh persamaan

$$
\begin{aligned}
x_i(k) &= \max\Big\{a_{ij} + x_j(k - \mu_{ij}), a_{im} + x_m(k - \mu_{im}), a_{in} + x_n(k - \mu_{in}), d_i(k)\Big\} \\
&= \max\Big\{\max_{p=j,m,n}\big\{a_{ip} + x_p(k - \mu_{ip})\big\}, d_i(k)\Big\} \\
&= \left(\bigoplus_p a_{ip} \otimes x_p(k - \mu_{ip})\right) \oplus d_i(k). \qquad (4.5)
\end{aligned}
$$

Dimisalkan pada jadwal terdapat sebanyak n keberangkatan, dan didefinisikan $a_{yz} = \varepsilon$ untuk pasangan kereta (y, z) yang tidak berhubungan sama sekali. Persamaan (4.5) dapat ditulis sebagai

$$
x_i(k) = \left(\bigoplus_p^n a_{ip} \otimes x_p(k - \mu_{ip})\right) \oplus d_i(k) \qquad (4.6)
$$

untuk $i = 1, 2, ..., n$.

Selanjutnya dengan mengumpulkan entri a_{ip} yang bersesuaian dengan periode *delay* dalam suatu matriks $\mathbf{A}_l = (a_{ip}(l))$ dengan $a_{ip}(l)$ adalah a_{ip} yang bersesuaian dengan periode *delay* l dan $[\mathbf{A}_l]_{yz} = \varepsilon$ jika tidak terdapat kaitan atau hubungan secara langsung antara kereta y dan z. Kemudian didefinisikan vektor $\mathbf{x}(k) = \big(\mathbf{x}_1(k), \cdots, \mathbf{x}_n(k)\big)^T$ dan $\mathbf{d}(k) = \big(\mathbf{d}_1(k), \cdots, \mathbf{d}_n(k)\big)^T$, maka Persamaan (4.6) dapat ditulis dalam bentuk

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(k) &= \big(\mathbf{A}_0 \otimes \mathbf{x}(k)\big) \oplus \big(\mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{x}(k-1)\big) \oplus \cdots \oplus \big(\mathbf{A}_M \otimes \mathbf{x}(k-M)\big) \oplus \mathbf{d}(k) \\
&= \bigoplus_{l=0}^{M} \mathbf{A}_l \otimes \mathbf{x}(k-l) \oplus \mathbf{d}(k) \qquad (4.7)
\end{aligned}
$$

untuk suatu $M \in \mathbb{N}$ periode *delay* maksimum.

4.2 Sistem Jaringan Kereta Api di DAOP VI Yogyakarta

Kereta Api (KA) yang dioperasikan oleh DAOP VI Yogyakarta antara lain: KA Prambanan Ekspres (Prameks), KA Solo Ekspres, KA Joglokerto, KA Batara Kresna, KA Kalijaga, KA Malioboro Ekspres, KA Taksaka, KA Sancaka, KA Fajar Utama Yogya, KA Senja Utama Yogya, KA Bogowonto, KA Gajahwong, KA Progo, KA Jakatingkir, KA Argo Lawu, KA Argo Dwipangga, KA Senja Utama Solo, dan KA Bengawan. Terdapat 14 jalur yang dioperasikan oleh DAOP VI Yogyakarta.

Selanjutnya diberikan daftar keberangkatan, dengan total keberangkatan adalah 238 keberangkatan untuk semua jalur. Pada tulisan ini dituliskan hanya untuk jalur 1.

Tabel 1 Daftar keberangkatan pada jalur 1

Variabel	**Keberangkatan KA**	**Variabel**	**Keberangkatan KA**
x_1	Prameks KTA $\Longrightarrow$ JNR	x_2	Prameks JNR $\Longrightarrow$ WTS
x_3	Prameks WTS $\Longrightarrow$ YOG	x_4	Prameks YOG $\Longrightarrow$ LPY
x_5	Prameks LPY $\Longrightarrow$ MGW	x_6	Prameks MGW $\Longrightarrow$ KLT
x_7	Prameks KLT $\Longrightarrow$ PWS	x_8	Prameks PWS $\Longrightarrow$ SLB
x_9	Prameks SLB $\Longrightarrow$ PWS	x_{10}	Prameks PWS $\Longrightarrow$ KLT
x_{11}	Prameks KLT $\Longrightarrow$ MGW	x_{12}	Prameks MGW $\Longrightarrow$ LPY
x_{13}	Prameks LPY $\Longrightarrow$ YOG	x_{14}	Prameks YOG $\Longrightarrow$ WTS
x_{15}	Prameks WTS $\Longrightarrow$ JNR	x_{16}	Prameks JNR $\Longrightarrow$ KTA

Untuk bisa memodelkan sistem jaringan kereta api DAOP VI Yogyakarta, perlu diketahui jadwal mula-mula sebelum ada proses sinkronisasi. Jadwal mula-mula berpedoman kepada jadwal kereta api yang diperoleh dari PT. KAI. Angka-angka yang diperoleh dikonversi dalam satuan menit. Berikut dimisalkan jadwal awal kereta api di DAOP VI Yogyakarta sebelum sinkronisasi ($\mathbf{d}^*(0)$):

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}^*(0) &= \left(d_1^*(0), d_2^*(0), \cdots, d_{238}^*(0)\right)^T \\
&= \big(0, 17, 41, 73, 84, 95, 123, 152, 0, 8, 37, 64, 75, 82, 113, 137, 90, 121, 150, \\
&\quad 157, 167, 187, 212, 300, 308, 333, 353, 363, 370, 399, 180, 187, 198, 221, \\
&\quad 250, 90, 98, 128, 151, 162, 270, 277, 288, 311, 340, 180, 188, 217, 240, \\
&\quad 251, 45, 53, 78, 104, 111, 140, 161, 177, 213, 234, 266, 310, 348, 390, 411, \\
&\quad 447, 464, 485, 514, 521, 546, 571, 50, 350, 110, 380, 30, 266, 309, 391, \\
&\quad 420, 80, 107, 136, 225, 269, 60, 89, 117, 146, 178, 75, 469, 502, 531, 559, \\
&\quad 73, 128, 228, 346, 75, 254, 372, 464, 0, 112, 163, 241, 300, 354, 433, 475, \\
&\quad 28, 57, 89, 215, 345, 28, 209, 332, 453, 486, 48, 76, 139, 223, 344, 48, 221, \\
&\quad 338, 433, 489, 60, 355, 387, 417, 440, 468, 484, 504, 533, 60, 67, 96, 119, \\
&\quad 135, 173, 194, 230, 270, 52, 348, 394, 421, 442, 470, 501, 530, 52, 59, 88, \\
&\quad 121, 159, 184, 211, 244, 13, 311, 366, 387, 423, 456, 13, 48, 82, 136, 173, \\
&\quad 219, 38, 70, 101, 145, 173, 215, 67, 95, 123, 178, 271, 390, 67, 122, 241, \\
&\quad 335, 390, 417, 60, 88, 117, 172, 268, 386, 60, 235, 354, 503, 14, 44, 74, \\
&\quad 131, 246, 365, 14, 184, 305, 404, 460, 488, 0, 26, 54, 88, 123, 181, 260, 0, \\
&\quad 196, 254, 309, 341, 376, 403\big)^T.
\end{aligned}$$

Sebelum melakukan penyusunan model sistem jaringan kereta api di DAOP VI Yogyakarta terlebih dahulu ditentukan aturan sinkronisasi. Hal ini bertujuan untuk menjamin penumpang dapat berpindah dari suatu kereta ke kereta lain yang menuju jalur berbeda. Stasiun-stasiun yang menjadi stasiun transfer adalah stasiun yang bisa menghubungkan stasiun yang tidak bisa dijangkau oleh jalur lain. Adapun yang menjadi stasiun transfer adalah stasiun Kutoarjo, stasiun Yogyakarta, stasiun Purwosari, dan stasiun Solo Balapan. Terdapat 64 syarat sinkronisasi yang harus dipenuhi.

Selanjutnya, sistem jaringan kereta api di DAOP VI Yogyakarta dimodelkan dalam bentuk aljabar *Max-Plus* dengan memperhatikan syarat atau kendala 4.1, 4.2, 4.3, dan 4.4. Kemudian, dikumpulkan item yang berkorespondensi dengan $\mathbf{x}(k) = \Big(x_1(k), \cdots, x_{238}(k)\Big)^T$ dan $\mathbf{x}(k-1) = \Big(x_1(k-1), \cdots, x_{238}(k-1)\Big)^T$ dan $\mathbf{x}(k)$ dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai berikut,

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}_0\mathbf{x}(k) \oplus \mathbf{A}_1\mathbf{x}(k-1) \oplus \mathbf{d}(k). \tag{4.8}$$

Diperhatikan $\mathbf{A}_0$ pada (4.8). Dengan menggunakan bantuan program Matlab dan *Toolbox* aljabar *Max-Plus* [10], dapat diketahui graf $\mathcal{G}(\mathbf{A}_0)$ merupakan asiklik (tidak memuat sirkuit) dengan kata lain $\mathcal{G}(\mathbf{A}_0)$ mempunyai bobot sirkuit rata-rata kurang dari atau sama dengan e. Sehingga berdasarkan Teorema 3.1 bisa dibentuk $\mathbf{A}_0^*$ sebagai berikut

$$\mathbf{A}_0^* = \bigoplus_{i=0}^{237} \mathbf{A}_0^{\otimes i}.$$

Kemudian $\mathbf{A}_0^*$ digunakan untuk memperoleh persamaan rekursif orde-1 sebagai berikut.

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = \tilde{\mathbf{A}} \otimes \tilde{\mathbf{x}}(k), \tag{4.9}$$

$k = 0, 1, 2, \cdots$, dengan

$$\tilde{\mathbf{x}}(k) = \big[\mathbf{x}(k-1)\big]^T = \begin{pmatrix} x_1(k-1) \\ x_2(k-1) \\ \vdots \\ x_{238}(k-1) \end{pmatrix}.$$

4.3 Desain Penjadwalan

Selanjutnya dibahas sifat periodik sistem (4.9) berdasarkan pengertian nilai eigen dan vektor eigen aljabar *Max-Plus*. Sebelumnya diberikan definisi teorema tentang sifat periodik yang diambil dari [7].

Definisi 4.1 *Sistem (4.9) dikatakan periodik dengan periode* λ, *jika x(k)=*$\lambda^{\otimes^k} \otimes$ *x(0) untuk k=1,2,3,... dan x(0) merupakan vektor eigen aljabar Max-Plus yang bersesuaian dengan* λ.

Teorema 4.2 *Diberikan sistem (4.9) yang mempunyai nilai eigen aljabar Max-Plus* λ. *Jika* $x(0)$ *merupakan vektor eigen aljabar Max-Plus yang bersesuaian dengan* λ *maka* $x(k) = \lambda^{\otimes^k} \otimes x(0)$ *untuk* $k = 1, 2, 3, \cdots$.

4.4 Penjadwalan

Dengan menggunakan program Matlab dan *toolbox* aljabar *Max-Plus* [10], diperoleh nilai eigen dari $\tilde{\mathbf{A}}$ adalah $\lambda = 588$ dan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ adalah $x(0)$. Dengan $x(0)$ sebagai berikut,

$$\begin{aligned} x(0) = \big(&3358, 3375, 3399, 3424, 3431, 3438, 3449, 3477, 3506, 4202, 4210, 4239,\\ &4277, 4284, 4315, 4339, 4462, 4493, 4522, 4529, 4539, 4559, 4584, 5330,\\ &5338, 5363, 5383, 5393, 5400, 5429, 5782, 5789, 5800, 5823, 5852, 5860,\\ &5868, 5898, 5921, 5932, 4934, 4941, 4952, 4975, 5004, 5012, 5020, 5049,\\ &5072, 5083, 5200, 5208, 5233, 5259, 5266, 5295, 5316, 5332, 5368, 5389,\\ &5422, 5453, 5491, 5532, 5553, 5589, 5606, 5627, 5656, 5663, 5688, 5713,\\ &4872, 4984, 4864, 5032, 5090, 5323, 5366, 5448, 5477, 5782, 5809, 5838,\\ &5927, 5971, 4973, 5002, 5030, 5059, 5091, 4093, 4486, 5751, 5780, 5808,\\ &4810, 4865, 4965, 5117, 4119, 4298, 4416, 4508, 5086, 5198, 5249, 5327,\\ &5782, 5862, 5941, 5983, 4985, 5014, 5046, 5172, 5302, 4304, 4485, 4608,\\ &4729, 4762, 5769, 5797, 5860, 5992, 6113, 6296, 6469, 6586, 6681, 6737,\\ &5029, 5324, 5356, 5386, 5409, 5437, 5453, 6749, 6778, 5787, 5794, 5823,\\ &5846, 5862, 5900, 5921, 5957, 5997, 6298, 6594, 6640, 6667, 6688, 6716,\\ &6747, 6776, 5785, 5792, 5821, 5854, 5892, 5917, 5944, 5977, 5022, 5320,\\ &5375, 5396, 5432, 5465, 4503, 4538, 4572, 4626, 4663, 5990, 5298, 5600,\\ &5689, 5748, 5779, 5811, 5843, 5874, 5918, 5946, 5988, 4990, 3992, 4020,\\ &4336, 5001, 5120, 4301, 4356, 4475, 4569, 4624, 4651, 4452, 4480, 4509,\\ &4564, 4660, 4778, 3959, 4134, 4253, 4402, 4429, 4452, 4482, 4512, 4867,\\ &4982, 5101, 4282, 4452, 4573, 4672, 4728, 4756, 3854, 3880, 3908, 3942,\\ &4858, 4916, 4995, 4312, 4618, 4676, 4731, 4763, 4798, 4825)^T. \end{aligned}$$

Karena $x(0)$ merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 588$ maka berdasarkan Teorema 4.2, berlaku $x(k) = 588^{\otimes^k} \otimes x(0)$ untuk $k = 1, 2, 3, \cdots$. Karena berlaku $x(k) = 588^{\otimes^k} \otimes x(0)$ untuk $k = 1, 2, 3, \cdots$, maka berdasarkan Definisi 4.1, sistem (4.9) dikatakan periodik dengan periode 588.

Selanjutnya, desain penjadwalan kereta api di DAOP VI Yogyakarta menggunakan informasi mengenai nilai eigen (λ) dan vektor eigen dari $\tilde{\mathbf{A}}$ pada (4.9) sebagai pertimbangan dalam pemilihan periode dan jadwal keberangkatan awalnya. Supaya diperoleh jadwal yang periodik, maka periode T diambil dari nilai λ, sedangkan waktu keberangkatan awal berpedoman pada vektor eigen dari $\tilde{\mathbf{A}}$ yang bersesuaian dengan λ. Dengan demikian diperoleh periode $T = 588$ menit.

Setiap elemen pada $x(0)$ mewakili waktu keberangkatan awal dari x_1 sampai x_{238}. Selanjutnya, setiap elemen dikonversikan ke dalam format jam dan menit. Berikut diberikan salah satu jadwal setelah konversi.

Tabel 2 Jadwal KA Prameks 252 dan Prameks 266

Stasiun	**KA Prameks 252**		**KA Prameks 266**	
	Datang	Berangkat	Datang	Berangkat
Kutoarjo	-	07.58	-	17.46
Jenar	08.12	08.15	18.00	18.03
Wates	08.36	08.39	18.24	18.27
Yogyakarta	09.09	09.12	18.57	19.00
Lempuyangan	09.16	09.19	19.04	19.07
Maguwo	09.26	09.29	19.14	19.17
Klaten	09.54	09.57	19.42	19.45
Purwosari	10.23	10.26	20.11	20.14
Solo Balapan	10.31	-	20.19	-

Hanya terdapat satu waktu tunggu pada "jadwal lama" yang lebih sebentar dibanding "jadwal baru". Dengan demikian, bisa dikatakan jadwal kereta api yang baru lebih efisien dibanding jadwal sebelumnya. Hal tersebut bisa terjadi karena pada jadwal sebelumnya tidak ada sinkronisasi, sehingga jadwal tersebut tidak memperhatikan waktu tunggu bagi penumpang yang ingin berpindah kereta.

5. PENUTUP

Beberapa kesimpulan yang diperoleh:

(1) Aljabar *Max-Plus* dapat diterapkan dalam penyusunan model sistem jaringan dan penjadwalan kereta api di DAOP VI Yogyakarta yang melibatkan adanya sinkronisasi antar kereta. Di DAOP VI Yogyakarta terdapat 238 keberangkatan dan 64 aturan sinkronisasi. Model yang diperoleh berbentuk sistem linear

$$\tilde{\mathbf{x}}\ (k+1) = \tilde{\mathbf{A}} \otimes \tilde{\mathbf{x}}\ (k)$$

$k = 0, 1, 2, \cdots$, dengan

$$\tilde{\mathbf{x}}(k) = \left[\mathbf{x}(k-1)\right]^T = \begin{pmatrix} x_1(k-1) \\ x_2(k-1) \\ \vdots \\ x_{238}(k-1) \end{pmatrix}.$$

dan $\tilde{\mathbf{A}}$ adalah matriks berukuran 238×238.

(2) Diperoleh periode keberangkatan kereta adalah setiap 588 menit. Sedangkan waktu keberangkatan awal kereta api di setiap stasiun diperoleh dari vektor eigen $\tilde{\mathbf{A}}$.

(3) Jadwal baru yang diperoleh lebih efisien dari pada jadwal sebelumnya.

REFERENSI

[1] Baccelli, F., Cohen, G., Olsder, G.J., dan Quadrat, J.P., *Synchronization and Linearity*, New York, 2001.

[2] De Schutter, B., *Max-Algebraic System Theory for Discrete Events Systems*, Katholieke Universiteit Leuven, Belgium, 1996.

[3] De Schutter, B. dan Van Den Boom, T., Max-Plus Algebra and Max-Plus Linear Discrete Event System: An Introduction, *Proceeding of The* 9^{th} *International Workshop on Discrete Event Systems* (20008), 36-42.

[4] Goverde, Rob M. P. , Railway Timetable Stability Analysis Using Max-Plus System Theory, *Transportation Research Part B* 2007, 179-201.

[5] Heidergott, B., Olsder, G.J., dan Van Der Woude, J., *Max-Plus at Work*, Princeton University Press, New Jersey, 2006.

[6] Kasie G. Farlow, *Max-Plus Algebra*, Virginia Polytechnic Institute and State University, Virginia, 2006.

[7] Rudhito M. Andy, *Aljabar Max-Plus dan Penerapannya*, Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta, 2016.

[8] Subiono, *Aljabar Min-Max Plus dan Terapannya*, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya, 2015.

[9] Subiono, dan Van Der Woude, J., Power Algorithms for (max,+) and bipartite (min,max,+) systems, *Journal of Discrete Event Dynamic Systems: Theory and Applications* (2000), 369-389.

[10] Stanczyk Jarosław, *Max-Plus Algebra Toolbox for Matlab*, 2016.

Andro Kurniawan* (Penulis Korespondensi)
Universitas Gadjah Mada, Indonesia
andro.kurniawan@mail.ugm.ac.id

Ari Suparwanto
Departemen Matematika Fakultas MIPA, Universitas Gadjah Mada, Indonesia
ari_suparwanto@ugm.ac.id