Jurnal Matematika Thales (JMT): 2021 ISSN: 2715-1891
Vol. 03 No. 01

AKSI PARSIAL MONOID DAN SEMIGRUP RESTRIKSI SEJATI (PARTIAL MONOID ACTIONS AND PROPER RESTRICTION SEMIGROUPS)

LISANATUN KHASANAH*, BUDI SURODJO

Abstract. Let S be a proper restriction semigroup and σ denote the least congruenceon S which identifies all elements of $P(S) \subset S$. Given a monoid T which acts partiallyon a semilattice Y. If (T, Y) is a strong M$-$pair, then we can define a proper restriction semigroup $M(T, Y)$. In this paper, we show that S is isomorphic to $M(S = \sigma; P(S))$. Furthermore, we discuss the classes of proper restriction semigroups and their relationship with the properties of the partial monoid actions, i.e. strong and antistrong. Moreover,from a strong partial monoid action we can construct a (global) monoid action. Furthermore, if T acts partially on Y relative to a homomorphism such that (T, Y) is a $W-$pair, then we can define a proper restriction semigroup $W(T, Y)$. If $W(T, Y)$ is a $W-$product of Y by T , then it can be embedded into the semidirect product of a semilattice by T.
Keywords: restriction semigroup, monoid, semilattice, partial monoid action

Abstrak. Diberikan semigrup restriksi sejati S dan kongruensi terkecil σ pada S yang mengidentifikasi semua elemen $P(S) \subset S$. Misalkan T monoid yang beraksi parsial pada semilattice Y . Jika pasangan (T, Y) merupakan $M-$pair kuat, maka dapat dibentuk semigrup restriksi sejati $M(T, Y)$. Pada paper ini ditunjukkan bahwa S isomorfis dengan $M(S = \sigma; P(S))$. Lebih lanjut, dikaji mengenai kelas-kelas semigrup restriksi sejati dan hubungannya dengan sifat kuat dan sifat antikuat aksi parsial monoid. Selanjutnya, dari aksi parsial monoid kuat dapat dikonstruksi suatu aksi (global) monoid. Lebih lanjut, jika T beraksi parsial pada Y relatif terhadap suatu homomorfisma sedemikian sehingga (T, Y) merupakan $W-$pair, maka dapat dibentuk semigrup restriksi sejati $W(T, Y)$.Jika $W(T, Y)$ merupakan $W-$product dari Y oleh T , maka dapat ditunjukkan bahwa $W(T, Y)$ dapat disisipkan ke dalam semidirect product dari suatu semilattice oleh T.
Kata-kata kunci: semigrup restriksi, monoid, semilattice, aksi parsial monoid

1. PENDAHULUAN

Dalam teori semigrup dikenal konsep tentang semigrup restriksi dan monoid. Salah satu kelas dari semigrup restriksi yaitu semigrup restriksi sejati. Misalkan S semigrup restriksi sejati dengan σ menotasikan kongruensi terkecil pada S dan $E = P(S)$ semilattice dari S. Himpunan S/σ merupakan monoid. Pada tahun 2004, Megrelishvili dan Schröder memperkenalkan konsep aksi parsial monoid. Aksi parsial monoid dapat memiliki sifat-sifat tertentu, salah satunya yaitu sifat kuat dan sifat antikuat. Berdasarkan sifatnya, aksi parsial monoid dapat menentukan kelas-kelas dari semigrup restriksi sejati. Selain itu, aksi parsial monoid berkaitan dengan M-pair kuat dari monoid T dan semilattice Y. Kemudian dari M-pair kuat (T, Y) dapat dibentuk himpunan $M(T, Y)$, sehingga jika dilengkapi dengan beberapa operasi tertentu dapat membentuk semigrup restriksi sejati [2]. Lebih lanjut, dari suatu aksi parsial monoid kuat dapat dikonstruksi aksi (global) monoid [7].

Selain $M(T, Y)$, dari monoid T dan semilattice Y dapat pula dibentuk himpunan $W(T, Y)$ dari W-pair (T, Y) yang merupakan W-product. Pada paper ini, W-product menyatakan Wreath product dan lebih lanjut merupakan kasus khusus dari semidirect product. Himpunan $W(T, Y)$ dan semidirect product dari Y oleh T merupakan semigrup restriksi sejati [7]. Berdasarkan hasil penelitian [5], W-product $W(T, Y)$ dapat disisipkan ke dalam semidirect product dari suatu semilattice oleh T.

Berdasarkan hal yang telah dipaparkan di atas, akan diselidiki struktur dan kelaskelas dari semigrup restriksi sejati. Selanjutnya, akan dikonstruksi aksi global dari suatu aksi parsial monoid kuat. Lebih lanjut, akan diselidiki tentang penyisipan $W(T, Y)$ ke dalam semidirect product dari Y oleh T.

2. Struktur Semigrup Restriksi Sejati

Pada bagian ini dibahas konsep semigrup restriksi sejati beserta strukturnya yang merujuk pada hasil penelitian [2]. Pada awal bagian ini diberikan definisi dan contoh semigrup restriksi sejati. Selanjutnya, diberikan pengertian dari M - pair kuat. Lebih lanjut, ditunjukkan bahwa sebarang semigrup restriksi sejati isomorfis dengan $M(S/\sigma, P(S))$.

Definisi 2.1 (7). *Diberikan semigrup restriksi S dan σ menotasikan kongruensi terkecil pada S. Semigrup restriksi S disebut semigrup restriksi sejati (proper) jika memenuhi dua kondisi berikut:*

(i) *untuk sebarang $a, b \in S$: jika $a^* = b^*$ dan $a\sigma b$ maka $a = b$, dan*
(ii) *untuk sebarang $a, b \in S$: jika $a^+ = b^+$ dan $a\sigma b$, maka $a = b$.*

Contoh 2.2. *Diberikan monoid S dengan elemen satuan 1, serta didefinisikan operasi unary" *" dan" +" dengan*

$$m^* = 1 \quad \text{dan} \quad m^+ = 1$$

Dapat diketahui bahwa S merupakan semigrup restriksi dan $E = \{1\}$. Akan ditunjukkan S juga merupakan semigrup restriksi sejati. Misalkan σ kongruensi terkecil pada S.

Diambil sebarang $a, b \in S$. Kemudian misalkan $a^* = b^*, a^+ = b^+$ ($a^* = b^* = 1 = a^+ = b^+$), dan $a\ \sigma$. Karena $a\sigma$, berarti terdapat $1 \in E$ sedemikian sehingga $1a = 1b$. Di sisi lain, $1a = a$ dan $1b = b$, sehingga didapat $a = b$. Oleh karena itu, S merupakan semigrup restriksi sejati.

Misalkan T monoid, Y semilattice, serta $\cdot$ dan o secara berturut-turut aksi parsial kiri dan aksi parsial kanan dari T pada Y yang mengawetkan urutan dan domain dari setiap $t \in T$ merupakan ideal urutan (yaitu, untuk sebarang $e, f \in Y$ dengan $e \leq f$ berlaku jika $t \cdot f$ terdefinisi ($f \circ t$ terdefinisi), maka $t \cdot e$ terdefinisi ($e \circ t$ terdefinisi) dan $t \cdot e \leq t \cdot f(e \circ t \leq f \circ t)$). Lebih lanjut, untuk setiap $t \in T$ dan $e \in Y$ jika berlaku:

(a) jika $t \cdot e$ terdefinisi, maka $(t \cdot e) \circ t$ terdefinisi dan $(t \cdot e) \circ t = e$;
(b) jika $e \circ t$ terdefinisi, maka $t \cdot (e \circ t)$ terdefinisi dan $t \cdot (e \circ t) = e$;
(c) untuk semua $t \in T$, terdapat $e \in Y$ sedemikian sehingga $e \circ t$ terdefinisi,

maka pasangan (T, Y) disebut M - pair kuat. Berikut diberikan sifat terkait M - pair kuat.

Lemma 2.3 (2)**.** *Misalkan T monoid, Y semilattice, dan $(T, Y)M$ - pair kuat. Untuk sebarang $a \in T$ dan e, $f \in Y$ pernyataan-pernyataan berikut berlaku:*

(1) *jika $e \circ a$ dan $f \circ a$ terdefinisi, maka $(e \wedge f) \circ a$ terdefinisi dan $(e \circ a) \wedge (f \circ a) = (e \wedge f) \circ a$;*
(2) *jika $a \cdot e$ dan $a \cdot f$ terdefinisi, maka $a \cdot (e \wedge f)$ terdefinisi dan $(a \cdot e) \wedge (a \cdot f) = a \cdot (e \wedge f)$.*

Bukti. Diketahui $(T, Y)M - pair$ kuat. Pada bagian ini hanya akan dibuktikan poin (1), karena poin (2) dapat ditunjukkan secara analog.

Misalkan $e \circ a$ dan $f \circ a$ terdefinisi. Akan ditunjukkan $(e \wedge f) \circ a$ terdefinisi.

Diperhatikan bahwa $e \wedge f \leq e$ dan $e \wedge f \leq f$. Oleh karena $e \circ a$ dan $f \circ a$ terdefinisi didapat $(e \wedge f) \circ a$ terdefinisi. Lebih lanjut, akan ditunjukkan $(e \circ a) \wedge (f \circ a) = (e \wedge f) \circ a$, dengan menunjukkan bahwa $(e \circ a) \wedge (f \circ a) \leq (e \wedge f) \circ a$ dan $(e \wedge f) \circ a \leq (e \circ a) \wedge (f \circ a)$. Karena $e \wedge f \leq e, e \wedge f \leq f$, dan $\circ$ mengawetkan urutan berarti diperoleh

$$(e \wedge f) \circ a \leq e \circ a \tag{2.1}$$

dan

$$(e \wedge f) \circ a \leq f \circ a. \tag{2.2}$$

Oleh karena itu, berdasarkan (2.1) dan (2.2) didapat

$$(e \wedge f) \circ a \leq (e \circ a) \wedge (f \circ a). \tag{2.3}$$

Selanjutnya karena $e \circ a$ dan $f \circ a$ terdefinisi, berdasarkan kondisi (a) (pada definisi $M(T, Y)$) didapat $a \cdot (e \circ a)$ terdefinisi dan $a \cdot (e \circ a) = e$ serta $a \cdot (f \circ a)$ terdefinisi dan $a \cdot (f \circ a) = f$. Diperhatikan $(e \circ a) \wedge (f \circ a) \leq (e \circ a)$. Oleh karena $a \cdot (e \circ a)$ terdefinisi diperoleh $a \cdot ((e \circ a) \wedge (f \circ a))$ terdefinisi. Selain itu, karena aksi parsial "." mengawetkan urutan berarti diperoleh

$$a \cdot ((e \circ a) \wedge (f \circ a)) \leq a \cdot (e \circ a) = e. \tag{2.4}$$

Kemudian karena $(e \circ a) \wedge (f \circ a) \leq (f \circ a)$ dan $\cdot$ mengawetkan urutan berarti diperoleh

$$a \cdot ((e \circ a) \wedge (f \circ a)) \leq a \cdot (f \circ a) = f. \tag{2.5}$$

Oleh karena itu, berdasarkan (2.4) dan (2.5) didapat

$$a \cdot ((e \circ a) \wedge (f \circ a)) \leq e \wedge f. \tag{2.6}$$

Lebih lanjut, berdasarkan kondisi (b) karena $a \cdot ((e \circ a) \wedge (f \circ a))$ terdefinisi berarti $[a \cdot ((e \circ a) \wedge (f \circ a))] \circ a$ terdefinisi dan

$$[a \cdot ((e \circ a) \wedge (f \circ a))] \circ a = (e \circ a) \wedge (f \circ a).$$

Berdasarkan (2.6) dan (2.7) serta karena aksi parsial " $\circ$" mengawetkan urutan, didapat

$$(e \circ a) \wedge (f \circ a) \leq (e \wedge f) \circ a.$$

Oleh karena itu, berdasarkan (2.3) dan (2.8) didapat $(e \circ a) \wedge (f \circ a) = (e \wedge f) \circ a$. $\square$

Selanjutnya, untuk suatu M - pair kuat (T, Y) dapat didefinisikan himpunan

$$M(T, Y) = \{(y, t) \in Y \times T : y \circ t \text{ terdefinisi } \}$$

dilengkapi dengan operasi perkalian yang diberikan oleh

$$(x, s)(y, t) = (s \cdot ((x \circ s) \wedge y), st), \quad \forall (x, s), (y, t) \in M(T, Y).$$

Lebih lanjut, pada $M(T, Y)$ dapat didefinisikan dua operasi *unary* "*" dan "+" dengan

$$(y, t)^* = (y \circ t, 1) \quad \text{ dan } \quad (y, t)^+ = (y, 1)$$

untuk sebarang $(y, t) \in M(T, Y)$. Himpunan $M(T, Y)$ dilengkapi dengan operasi perkalian serta dua operasi unary"*" dan "+" di atas membentuk semigrup restriksi sejati.

Teorema 2.4 (7)**.** *Sebarang semigrup restriksi sejati S isomorfis dengan $M(S/\sigma, P(S))$.*

Bukti. Diberikan semigrup restriksi sejati S. Misalkan $T = S/\sigma$ dan didefinisikan aksi parsial kanan dari T pada $P(S)$ oleh

$$e \circ m\sigma \text{ terdefinisi } \Leftrightarrow \exists s \in S, \text{ dengan } e = s^+ \text{dan } m\sigma = s\sigma,$$

serta $e \circ m\sigma = s^+ \circ s\sigma = s^*$. Jelas bahwa aksi parsial tersebut well defined, sebab S merupakan semigrup restriksi sejati.

Untuk sebarang $e \in P(S)$, didapat $e = e^+$dan $e\sigma = 1_T$ sehingga $e \circ 1_T$ terdefinisi dan $e \circ 1_T = e$. Misalkan $s^+ \circ s\sigma$ dan $(s^+ \circ s\sigma) \circ t\sigma$ terdefinisi. Karena $s^* \circ t\sigma$, berarti $u \in S$ dengan $s^* = u^+$dan $u\sigma = t\sigma$. Oleh karena itu, diperoleh

$$\left(s^+ \circ s\sigma\right) \circ t\sigma = s^* \circ t\sigma = u^+ \circ u\sigma = u^*.$$

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $s^+ \circ (st)\sigma$ terdefinisi dan $u^* = s^+ \circ (st)\sigma$. Diperhatikan bahwa $(su)^+ = (su^+)^+ = (ss^*)^+ = s^+$dan dengan cara yang sama didapat $(su)^* = (s^*u)^* = (u^+u)^* = u^*$.

Jelas bahwa $su\sigma$ st, sehingga $s^+ \circ (st)\sigma$ terdefinisi dan

$$s^{+} \circ (st)\sigma = (su)^{+} \circ (su)\sigma = (su)^{*} = u^{*}.$$

Oleh karena itu, o merupakan aksi parsial kanan.

Lebih lanjut, untuk setiap $z\sigma \in T$, domain prehomomorfisma yang berkorespondensi dengan aksi kanan dari $z\sigma$ merupakan ideal urutan mengingat aksi $\circ$ mengawetkan urutan. Kemudian dengan cara yang sejalan dapat didefinisikan suatu aksi parsial kiri dari T pada $P(S)$ oleh

$$m\sigma \cdot e \text{ terdefinisi } \Leftrightarrow \exists s \in S, \text{ dengan } e = s^{*} \text{ dan } m\sigma = s\sigma,$$

dengan $m\sigma \cdot e = s\sigma \cdot s^{*} = s^{+}$. Didapat bahwa $\cdot$ merupakan aksi parsial kiri yang mengawetkan urutan dan juga domain dari setiap $t \in T$ merupakan ideal urutan.

Selanjutnya, akan ditunjukkan kondisi (a), (b), dan (c) dipenuhi. Misalkan $e \circ m\sigma$ terdefinisi. Artinya $e = s^{+}$dan $m\sigma = s\sigma$, untuk suatu $s \in S$ dan $e \circ m\sigma = s^{+} \circ s\sigma = s^{*}$. Oleh karena itu, $s\sigma \cdot s^{*}$ terdefinisi dan

$$m\sigma \cdot (e \circ m\sigma) = s\sigma \cdot \left(s^{+} \circ s\sigma\right) = s\sigma \cdot s^{*} = s^{+} = e.$$

Jadi kondisi (b) berlaku, dan dengan cara yang sama kondisi (a) dalam definisi M-pair kuat juga berlaku. Lebih lanjut, jika $m\sigma \in T$, maka $m^{+} \circ m\sigma$ terdefinisi sehingga kondisi (c) berlaku. Oleh karena itu, $(S/\sigma, P(S))M - pair$ kuat.

Misalkan $\theta : S \rightarrow M(S/\sigma, P(S))$ pengaitan yang didefinisikan oleh

$$\theta(s) := \left(s^{+}, s\sigma\right), \forall s \in S.$$

Akan ditunjukkan bahwa θ merupakan isomorfisma. Diambil sebarang $s, t \in S$ dengan $\theta(s) = \theta(t)$. Berarti didapat

$$\left(s^{+}, s\sigma\right) = \left(t^{+}, t\sigma\right) \Leftrightarrow s^{+} = t^{+} \text{dan } s\sigma = t\sigma.$$

Diperhatikan $s\sigma = t\sigma$, sehingga $s\sigma t$. Lebih lanjut, karena S semigrup restriksi sejati (proper) dan $s^{+} = t^{+}$serta $s\sigma t$, berarti diperoleh $s = t$. Jadi θ fungsi satu-satu. Kemudian jelas bahwa θ surjektif.

Selanjutnya akan ditunjukkan θ merupakan homomorfisma. Diambil sebarang $s, t \in S$. Berlaku bahwa $\theta(s)\theta(t) = \theta(st)$ Kemudian, didapat pula

$$\theta\left(s^{*}\right) = \left(s^{*}, 1\right) = \left(s^{+} \circ \sigma, 1\right) = \left(s^{+}, s\sigma\right)^{*} = (\theta(s))^{*}$$

dan

$$\theta\left(s^{+}\right) = \left(s^{+}, 1\right) = \left(s^{+}, s\sigma\right)^{+} = (\theta(s))^{+}.$$

Jadi terbukti bahwa θ merupakan isomorfisma. Dengan kata lain, S isomorfis dengan $M(S/\sigma, P(S))$. □

3. Kelas-Kelas dari Semigrup Restriksi Sejati

Pada bagian ini akan dibahas mengenai semigrup restriksi sejati ekstra dan semigrup restriksi sejati ultra yang terkait dengan aksi parsial.

Misalkan S semigrup restriksi sejati dan σ relasi kongruensi terkecil pada S. Kemudian misalkan ”$\cdot$” dan ”$\circ$” berturut-turut aksi parsial kiri dan aksi parsial kanan dari S/σ pada $E = P(S)$. Pada semigrup restriksi sejati terdapat kondisi tertentu, antara lain yaitu kondisi ekstra kanan $\left((EP)^{r}\right)$ dan kondisi ekstra kiri $\left((EP)^{l}\right)$ sebagai berikut.

$(EP)^r$ Untuk semua $s, t, u \in S$: jika $s\sigma tu$, maka terdapat $v \in S$ sedemikian sehingga $t^+s = tv$ dan $u\sigma v$.

$(EP)^l$ Untuk semua $s, t, u \in S$: jika $s\sigma ut$, maka terdapat $v \in S$ sedemikian sehingga $st^* = vt$ dan $u\sigma v$.

Semigrup restriksi sejati S dikatakan ekstra jika memenuhi kondisi ekstra kanan sekaligus ekstra kiri. Sifat kuat aksi parsial parsial pada S ekuivalen dengan kondisi ekstra pada S sebagai berikut.

Teorema 3.1 (7)**.** *Misalkan S semigrup restriksi sejati.*

(1) *S memenuhi kondisi $(EP)^r$ jika dan hanya jika "$\circ$" aksi parsial kuat.*
(2) *S memenuhi kondisi (EP) jika dan hanya jika"$\cdot$" aksi parsial kuat.*

Bukti. Diketahui S semigrup restriksi sejati. Pada bagian ini hanya akan dibuktikan poin (1), karena poin (2) dapat ditunjukkan secara analog.

($\Rightarrow$) Diketahui S memenuhi kondisi $(EP)^r$. Akan ditunjukkan "$\circ$" aksi parsial kuat. Misalkan $p, q \in S/\sigma$ dan $x \in E$ sedemikian sehingga $x \circ (pq)$ dan $x \circ p$ terdefinisi. Lebih lanjut, misalkan $y = x \circ p$ dan $s \in pq, t \in p$ sedemikian sehingga $x = s^+ = t^+$dan $y = t^*$. Diambil sebarang elemen $u \in q$. Berdasarkan $(EP)^r$ terdapat $v \in q$ sedemikian sehingga $t^+s = tv$. Karena $t^+ = s^+$, berarti diperoleh $s = tv$. Kemudian misalkan $e = v^+$, hal ini mengakibatkan $t^+ = s^+ = (tv)^+ = (tv^+)^+ = (te)^+$. Oleh karena itu, didapat $t = t^+t = (te)^+t = te^+ = te$ dan $v^+ = e \geq t^* = y$. Jadi $y \circ q$ terdefinisi, sehingga "$\circ$" aksi parsial kuat.

($\Leftarrow$) Diketahui "$\circ$" aksi parsial kuat. Akan ditunjukkan kondisi $(EP)^r$ berlaku.

Diambil sebarang $s, t, u \in S$ sedemikian sehingga $s\sigma tu$. Berarti $s^+t^+ \circ \sigma(tu)$ terdefinisi. Diperhatikan bahwa $s^+t^+ \circ \sigma(t)$ juga terdefinisi. Kemudian karena " $\circ$ " aksi parsial kuat, akibatnya $(s^+t^+ \circ \sigma(t)) \circ \sigma(u)$ terdefinisi. Jadi terdapat $v' \in \sigma(u)$ yang memenuhi $(v')^+ \geq s^+t^+ \circ \sigma(t) = (s^+t)^*$. Oleh karena itu, didapat

$$\left(s^+tv'\right)^+ = \left(s^+t\,(v')^+\right)^+ = \left(s^+t\right)^+ = s^+t^+ = \left(t^+s\right)^+.$$

Lebih lanjut, karena $s^+tv'\sigma tu\sigma t^+s$ berarti diperoleh $t^+s = s^+tv' = t\,(s^+t)^*\,v'$. Misalkan $v = (s^+t)^*\,v'$, didapat $v \in \sigma(u)$ dan $t^+s = tv$, sehingga kondisi $(EP)^r$ berlaku. □

Berikut diberikan syarat perlu dan cukup suatu semigrup restriksi merupakan semigrup restriksi sejati ultra.

Teorema 3.2 (7)**.** *Suatu semigrup restriksi S disebut sejati ultra jika dan hanya jika aksi parsial kanan $\circ$ dari S/σ pada $E = P(S)$ merupakan aksi terdefinisi secara parsial (partially defined action).*

Bukti. ($\Rightarrow$) Diketahui S semigrup restriksi sejati ultra. Misalkan $\cdot$ aksi parsial kiri dan o aksi parsial kanan dibawah semigrup restriksi S. Oleh karena itu, $\cdot$ merupakan aksi terdefinisi secara parsial. Akan ditunjukkan o terdefinisi secara parsial. Diambil $x \in P(S)$ dan $s, t \in S/\sigma$ sedemikian sehingga $x \circ st$ terdefinisi. Misalkan $y = x \circ st$, sehingga didapat $x = st \cdot y$. Karena $\cdot$ aksi terdefinisi secara parsial, berarti $t \cdot y$ dan $s \cdot (t \cdot y)$ terdefinisi. Lebih lanjut, misalkan $z = t \cdot y$ dan $u = s \cdot z$, sehingga diperoleh

$y = z \circ t$ dan $z = u \circ s$, serta $y = (u \circ s) \circ t$. Jadi $\circ$ merupakan aksi terdefinisi secara parsial.

($\Leftarrow$) Diketahui o aksi parsial kanan dari S/σ pada $E = P(S)$ yang terdefinisi secara parsial. Akan ditunjukkan S semigrup restriksi sejati ultra, yaitu dengan menunjukkan bahwa aksi - terdefinisi secara parsial. Diambil $x \in P(S)$ dan $s, t \in S/\sigma$ sedemikian sehingga $(st) \cdot x$ terdefinisi. Misalkan $y = (st) \cdot x$, sehingga didapat $x = y \circ (st)$. Karena - aksi terdefinisi secara parsial, berarti $y \circ s$ dan $(y \circ s) \circ t$ terdefinisi. Lebih lanjut, misalkan $z = y \circ s$ dan $u = z \circ t$, sehingga diperoleh $y = c \cdot z$ dan $z = t \cdot u$, serta $y = s \cdot (t \cdot u)$. Jadi $\cdot$ merupakan aksi terdefinisi secara parsial. Oleh karena itu, S semigrup restriksi sejati ultra. $\square$

4. Konsep Aksi Global dari suatu Aksi Parsial Monoid Kuat

Pada bagian ini akan dibahas mengenai pengonstruksian aksi global dari suatu aksi parsial monoid kuat.

Misalkan Y semilattice dan T monoid yang beraksi pada Y secara parsial kiri melalui operasi " .", serta misalkan didefinisikan $\varphi : T \to \mathcal{PT}(Y), \varphi(t) = \varphi_t$, dengan $\varphi_t(y) = t \cdot y, \varphi_t \in \mathcal{PT}(Y), y \in Y$. Berdasarkan pendefinisian tersebut, didapat bahwa $\operatorname{dom}(\varphi_t) \subseteq Y$ dan $\operatorname{ran}(\varphi_t) = \{t \cdot y \mid y \in Y\} \subseteq Y$. Berikut aksioma-aksioma yang terkait dengan pemetaan φ_t, untuk suatu $t \in T$.

(A) $\operatorname{dom}(\varphi_t)$ dan $\operatorname{ran}(\varphi_t)$ ideal urutan di Y.
(B) $\varphi_t : \operatorname{dom}(\varphi_t) \to \operatorname{ran}(\varphi_t)$ isomorfisma urutan.
(C) $\operatorname{dom}(\varphi_t) \neq \emptyset$.

Selanjutnya, misalkan "$\cdot$" suatu aksi parsial kiri kuat dari T pada Y yang memenuhi aksioma (A), (B), dan (C). Lebih lanjut, misalkan "$\circ$" merupakan aksi parsial kanan kebalikan dari ".", yaitu jika $t \cdot x$ terdefinisi, maka berlaku $x \circ t$ terdefinisi dan $t \cdot x \circ t = x$ untuk sebarang $t \in T, x \in Y$.

Pada himpunan $Y \times T$ dapat didefinisikan suatu relasi biner $\to$, dengan untuk sebarang $(x, s), (y, t) \in Y \times T$ berlaku

$$(x, s) \to (y, t) \iff \exists p \in T \text{ sedemikian sehingga } s = tp \text{ dan } p \cdot x = y.$$

Oleh karena itu, didapat

$$(x, tp) \to (p \cdot x, t)$$

dengan $p \cdot x$ terdefinisi.

Misalkan $\sim$ relasi ekuivalensi pada $Y \times T$ yang memuat relasi $\to$. Oleh karena itu, terbentuk himpunan kelas-kelas ekuivalensi yang dinotasikan dengan $(Y \times T)/\sim$. Lebih lanjut, pada himpunan $(Y \times T)/\sim$ dapat didefinisikan suatu relasi biner $\geqq$ dengan

$$A \geqq B \iff \exists (x, s) \in A \text{ dan } (y, s) \in B \text{ sedemikian sehingga}$$
$$x \geq y, \forall A, B \in (Y \times T)/\sim .$$

Berdasarkan hal tersebut didapat beberapa sifat yang dinyatakan dalam lemma berikut.

Lemma 4.1 (7)**.** *Pernyataan-pernyataan berikut berlaku.*

(i) *Jika $A \geqq B$ dan $(z,t) \in A$, maka terdapat $(u,t) \in B$ dengan $z \geq u$.*
(ii) *Relasi $\geqq$ merupakan preorder pada $(Y \times T)/\sim$.*

Bukti. Akan ditunjukkan bahwa (i) dan (ii) berlaku.

(i) Diketahui $A \geqq B$ dan $(z,t) \in A$. Artinya terdapat $(x,s) \in A$ dan $(y,s) \in B$ sedemikian sehingga $x \geq y$. Akan ditunjukkan $z \geq y$. Karena $(x,s) \in A$ dan $(z,t) \in A$, maka $(x,s) \sim (z,t)$. Akibatnya, terdapat barisan $(x_0,s_0),(x_1,s_1),\ldots,$ $(x_n,s_n) \in Y \times T$ sedemikian sehingga $(x,s) = (x_0,s_0),(z,t) = (x_n,s_n)$, dan berlaku $(x_i,s_i) \to (x_{i+1},s_{i+1})$ atau $(x_{i+1},s_{i+1}) \to (x_i,s_i)$, untuk setiap $i = 0,1,\ldots,n-1$. Akan ditunjukkan $z = x_n \geq y$ dengan menggunakan induksi.
Misalkan $(x_0,s_0) = (x,s) \to (x_1,s_1)$, artinya terdapat $q \in T$ sehingga $s = s_1 q$ dan $x_1 = q \cdot x$. Karena $x \geq y$ dan $q \cdot x$ terdefinisi, berarti didapat $q \cdot y$ terdefinisi dan juga $(y,s) \to (q \cdot y, s_1)$. Kemudian misalkan $y_1 = q \cdot y$, sehingga diperoleh $x_1 = q \cdot x \geq q \cdot y = y_1$. Di sisi lain, misalkan $(x_1,s_1) \to (x,s)$, artinya terdapat $p \in T$ sehingga $s_1 = sp$ dan $x_1 = x \circ p$. Karena $x \geq y$ dan $x \circ p$ terdefinisi, berarti didapat $y \circ p$ terdefinisi dan juga $(y \circ p, sp) \to (y,s)$. Kemudian misalkan $y_1 = y \circ p$, sehingga diperoleh $x_1 = x \circ p \geq y \circ p = y_1$. Dengan cara yang serupa, didapat $x_i \geq y_i$ dan $y_i = u_i y_{i-1}, u_i \in T$ untuk setiap $i = 1,2,\ldots,n$. Oleh karena itu, didapat $x_n \geq y_n = u_{n-1}y_{n-1} = u_{n-1}u_{n-2}y_{n-2} = \ldots = u_{n-1}\ldots$ uy. Jadi, $z = x_n \geq y$.
(ii) Akan ditunjukkan bahwa relasi " $\geqq$ " merupakan preorder pada $(Y \times T)/\sim$. Cukup jelas bahwa relasi $\geqq$ pada $(Y \times T)/\sim$ bersifat refleksif. Lebih lanjut, diambil sebarang $A,B,C \in (Y \times T)/\sim$, dengan $A \geqq B$ dan $B \geqq C$. Akan ditunjukkan $B \geqq C$. Karena $A \geqq B$, maka terdapat $(a,s) \in A$ dan $(b,s) \in B$ sedemikian sehingga $a \geq b$. Kemudian, karena $B \geqq C$ dan $(b,s) \in B$ maka berdasarkan (i) terdapat $(u,s) \in C$ dengan $b \geq u$. Oleh karena $a \geq b$ dan $b \geq u$ ($\geq$ bersifat transitif di Y), maka didapat $a \geq u$. Jadi terdapat $(a,s) \in A$ dan $(u,s) \in C$ dengan $a \geq u$. Dengan kata lain, $A \geqq C$. Jadi relasi $\geqq$ pada $(Y \times T)/\sim$ bersifat transitif. Oleh karena itu, $\geqq$ merupakan preorder pada $(Y \times T)/\sim$.

Lemma 4.2 (7)**.** *Misalkan" $\sim$ " relasi ekuivalensi minimum pada $Y \times T$ yang memuat relasi" $\to$ ". Jika $(x,s) \sim (y,t)$, maka berlaku $s \cdot x$ dan $t \cdot y$ terdefinisi serta $s \cdot x = t \cdot y$ atau $s \cdot x$ dan $t \cdot y$ tidak terdefinisi.*

Bukti. Diketahui $(x,s) \sim (y,t)$ serta relasi $\sim$ memuat relasi $\to$. Misalkan $(x,s) \to (y,t)$. Artinya, terdapat $p \in T$ sedemikian sehingga $s = tp$ dan $p \cdot x = y$. Kemudian misalkan $s \cdot x$ terdefinisi, berarti $tp \cdot x$ terdefinisi. Karena $p \cdot x$ dan $tp \cdot x$ terdefinisi serta "." aksi parsial kiri kuat, akibatnya didapat $t \cdot (p \cdot x)$ terdefinisi dan $t \cdot (p \cdot x) = tp \cdot x$. Jadi, $t \cdot y$ terdefinisi dan juga $t \cdot y = s \cdot x$. Sebaliknya, misalkan $s \cdot x$ tidak terdefinisi, dengan kata lain $tp \cdot x$ tidak terdefinisi. Karena $p \cdot x$ terdefinisi dan $tp \cdot x$ tidak terdefinisi, akibatnya $t \cdot (p \cdot x)$ tidak terdefinisi. Dengan kata lain, $t \cdot y$ tidak terdefinisi. □

Lemma 4.3 (7). *Misalkan $A, B \in (T \times Y)/\sim$ sedemikian sehingga $A \neq B, A \leqq B$, dan $B \leqq A$. Jika $(x, s) \in A$, maka $s \cdot x$ tidak terdefinisi. Akibatnya, tidak ada elemen di A yang berbentuk $(x, 1)$.*

Bukti. Diketahui $A \neq B$, berarti $A \cap B = \emptyset$. Misalkan (x, s) sebarang elemen di A. Dengan menggunakan Lemma 4.1, karena $B \leqq A$ dan $(x, s) \in A$, berarti terdapat $(z, s) \in B$ sedemikian sehingga $x \gneqq z$. Lebih lanjut, karena $A \leqq B$ dan $(z, s) \in B$, berarti terdapat $(y, s) \in A$ sedemikian sehingga $z \gneqq y$. Kemudian diasumsikan $s \cdot x$ terdefinisi. Dengan menggunakan Lemma 4.2, karena $(x, s) \sim (y, s)$ dan $s \cdot x$ terdefinisi, berarti $s \cdot y$ terdefinisi dan berlaku $s \cdot x = s \cdot y$. Akibatnya, didapat $x = (s \cdot x) \circ s = (s \cdot y) \circ s = y$. Terjadi kontradiksi karena $x \neq y (x \gneqq z \gneqq y$ akibatnya $x \neq y)$. $\square$

Misalkan " $\approx$ " relasi ekuivalensi pada $Y \times T$ yang didefinisikan oleh $(x, s) \approx (y, t)$ jika dan hanya jika $[x, s]_\sim \leqq [y, t]_\sim$ dan $[y, t]_\sim \leq [x, s]_\sim$, dengan $[x, s]_\sim$ menotasikan kelas- $\sim$ dari (x, s), untuk semua $(x, s), (y, t) \in Y \times T$. Oleh karena itu, dapat terbentuk himpunan kelas-kelas ekuivalensi $\approx$ dari $Y \times T$. Misalkan himpunan tersebut dinotasikan dengan $X = (Y \times T)/\approx$. Notasi $[x, s]$ menyatakan kelas- $\approx$ dari (x, s). Kemudian pada X didefinisikan relasi urutan parsial $\lesssim$, yaitu $[x, s] \lesssim [y, t]$ jika $[x, s]_\sim \leqq [y, t]_\sim$, untuk setiap $[x, s], [y, t] \in X$. Himpunan X yang dilengkapi dengan relasi " $\lesssim$ " merupakan himpunan terurut parsial. Lebih lanjut, misalkan $\bar{Y} = \{[y, 1] : y \in Y\}$. Diberikan sifat-sifat sebagai berikut.

Lemma 4.4 (7). *Diberikan himpunan $X = (Y \times T)/\approx$ dan $\bar{Y} = \{[y, 1] : y \in Y\}$. Pernyataan-pernyataan berikut berlaku:*

(1) *Pemetaan $\theta : Y \to \bar{Y}$, dengan $\theta(y) = [y, 1]$, untuk setiap $y \in Y$ merupakan isomorfisma urutan antara Y dan $\bar{Y}$.*
(2) *$\bar{Y}$ merupakan ideal urutan dari X.*
(3) *$\bar{Y}$ merupakan semillatice dibawah relasi urutan yang telah diinduksikan pada $\bar{Y}$ dan Y isomorfis dengan $\bar{Y}$ ditinjau sebagai semillatice bawah melalui θ.*

Bukti. Diketahui $X = (Y \times T)/\approx$ dan $\bar{Y} = \{[y, 1] : y \in Y\}$.

(1) Diketahui $\theta : y \mapsto [y, 1], \forall y \in Y$. Jelas bahwa θ pemetaan yang surjektif dan injektif. Akan ditunjukkan θ menyisipkan urutan. Diambil sebarang $x, y \in Y$. Misalkan $x \leq y$. Oleh karena itu, dengan menggunakan definisi dari preorder pada $(Y \times T)/\sim$ didapat $[x, 1]_\sim \leqq [y, 1]_\sim$, sehingga $[x, 1] \lesssim [y, 1]$. Sebaliknya, misalkan $[x, 1] \lesssim [y, 1]$. Berarti $[x, 1]_\sim \leqq [y, 1]_\sim$ dan berdasarkan Lemma 4.1 didapat $[x, 1]_\sim = [z, 1]_\sim$, untuk suatu $z \leq y$. Oleh karena itu, diperoleh $(x, 1) \sim (z, 1)$. Lebih lanjut, dengan menggunakan Lemma 4.2 didapat $x = 1 \cdot x = 1 \cdot z = z$. Dengan kata lain, $x \leq y$. Jadi θ menyisipkan urutan, sehingga θ merupakan isomorfisma urutan.
(2) Akan ditunjukkan $\bar{Y}$ merupakan ideal urutan dari X. Diambil sebarang $[x, s] \in X$ dan $[y, 1] \in \bar{Y}$ dengan $[x, s] \lesssim [y, 1]$. Karena $[x, s] \lesssim [y, 1]$, berarti $[x, s]_\sim \leqq [y, 1]_\sim$. Oleh karena itu, dengan menggunakan Lemma 4.1 didapat $(x, s) \sim (z, 1)$, untuk suatu $z \leq y$. Akibatnya, $(x, s) \approx (z, 1)$ sehingga diperoleh $[x, s] \in \bar{Y}$.
(3) Jelas berdasarkan pernyataan (1) dan (2).

□

Lemma 4.5 (7)**.** *Diketahui $\sim$ dan $\approx$ relasi ekuivalensi pada $Y \times T$, preorder pada $(Y \times T)/\sim$, serta $\lesssim$ relasi urutan parsial pada $(Y \times T)/\approx$. Jika $[x,s] = [y,p]$, maka berlaku $[x,ts] = [y,tp]$ untuk sebarang $t \in T$.*

Bukti. Diketahui $[x,s] = [y,p]$, berarti $(x,s) \approx (y,p)$. Oleh karena itu, didapat $[x,s]_\sim \leqq [y,p]_\sim$ dan $[y,p]_\sim \leqq [x,s]_\sim$. Diambil sebarang $t \in T$. Akan ditunjukkan $[x,ts] = [y,tp]^{\cdot \text{ Karena}}$ $[x,s]_\sim \leqq [y,p]_\sim$, dengan menggunakan Lemma 4.1 didapat $[x,s]_\sim = [z,p]_\sim$, untuk suatu $z \leq y$. Kemudian karena $[x,s]_\sim = [z,p]_\sim$, berarti $(x,s) \sim (z,p)$. Diasumsikan $(x,s) \to (z,p)$. Artinya terdapat $q \in T$ sedemikian sehingga $s = pq$ dan $q \cdot x = z$. Oleh karena itu, $(x,s) \to (z,p)$ dapat dituliskan dengan $(x,pq) \to (q \cdot x, p)$. Oleh karena $(x,pq) \to (q \cdot x, p)$, didapat $(x,tpq) \to (q \cdot x, tp)$ yang berarti bahwa $(x,ts) \to (z,tp)$. Dengan menggunakan induksi diperoleh $(x,ts) \sim (z,tp)$, sehingga $[x,ts]_\sim = [z,tp]_\sim$. Oleh karena itu, didapat $[x,ts]_\sim \leqq [y,tp]_\sim$. Sebaliknya, dengan cara yang sejalan diperoleh bahwa $[y,tp]_\sim \leqq [x,ts]_\sim$. Jadi, didapat $[x,ts]_\sim = [y,tp]_\sim$. □

Pada himpunan X dapat diberikan suatu aksi kiri dari T pada X, katakan aksi "*". Untuk sebarang $t \in T$ dan $[y,s] \in X$, didefinisikan $t * [y,s] := [y,ts]$. Aksi * well defined, sebab untuk sebarang $t,u \in T$ dan $[y,s],[z,v] \in X$ dengan $t = u$ dan $[y,s] = [z,v]$, berlaku

$$\begin{aligned} t * [y,s] &= [y,ts] \\ &= [z,tv] \\ &= [z,uv] \\ &= u * [z,v]. \end{aligned}$$

Lebih lanjut, aksi kiri $*$ merupakan aksi yang mengawetkan urutan.

Lemma 4.6 (7)**.** *Diberikan semilattice $\bar{Y} = \{[y,1] : y \in Y\}$ dan $\lesssim$ relasi urutan parsial pada X. Pernyataan-pernyataan berikut berlaku.*

(1) *Aksi parsial kiri yang diinduksi" *" dari T pada $\bar{Y}$ isomorfis dengan aksi parsial kiri"." dari T pada Y.*
(2) *Jika $[x,s] \lesssim t * [y,1]$, maka $[x,s] = t * [z,1]$ untuk suatu $z \leq y$.*

Bukti.

(1) Diambil sebarang $t \in T$ dan $y \in Y$. Berdasakan Lemma 4.2 dan Lemma 4.3, didapat $[y,t] = [z,1]$ untuk suatu $z \in Y$ jika dan hanya jika $t \cdot y$ terdefinisi. Misalkan $t \cdot y$ terdefinisi. Oleh karena itu, didapat $t * [y,1] = [y,t] = [t \cdot y, 1]$. Sebaliknya, jika $t \cdot y$ tidak terdefinisi, maka $t * [y,1] \notin \bar{Y}$ sehingga aksi parsial yang diinduksi tidak terdefinisi pada $[y,1]$.
(2) Diketahui $[x,s] \lesssim t * [y,1]$, berarti $[x,s] \lesssim [y,t]$. Oleh karena itu, didapat $[x,s]_\sim \leqq [y,t]_\sim$. Berdasarkan Lemma 4.1, diperoleh $[x,s]_\sim = [z,t]_\sim$ untuk suatu $z \leq y$. Akibatnya didapat $[x,s] = [z,t]$. Dengan kata lain, $[x,s] = t*[z,1]$ untuk suatu $z \leq y$.

□

Berikut diberikan sifat terkait dengan pengonstruksian aksi global dan semigrup restriksi sejati.

Teorema 4.7 (7)**.** *Misalkan S semigrup restriksi sejati ekstra kiri, X himpunan terurut parsial, dan " *" aksi kiri dari S/σ pada X yang diperoleh dari penerapan pengonstruksian aksi global dari aksi parsial kiri kuat"." di S. Oleh karena itu, untuk setiap $x, y \in \overline{P(S)}$ dan $s \in S/\sigma$, batas bawah terbesar $x \wedge s * y$ termuat di X dan perkalian dalam semigrup $M(S/\sigma, \overline{P(S)})$ dapat dinyatakan oleh*

$$(x, s)(y, t) = (x \wedge s * y, st).$$

Bukti. Diketahui S semigrup restriksi sejati ekstra kiri dan " " *aksi kiri dari S/σ pada X yang merupakan hasil globalisasi dari aksi parsial kiri kuat "." di S. Diambil sebarang $x, y \in \overline{P(S)}$ dan $s \in S/\sigma$. Berdasarkan Lemma 4.6 (2), didapat range aksi ""* merupakan ideal urutan di X. Dengan demikian, didapat $x \wedge s * y$ ada di X dan

$$(x, s)(y, t) = (s \cdot ((x \circ s) \wedge y), st) = (x \wedge s * y, st).$$

□

5. W-PRODUCTS DISISIPKAN KE DALAM SEMIDIRECT PRODUCTS

Selanjutnya, akan dibahas mengenai hubungan antara semidirect product dan W-product dari suatu semilattice oleh monoid. Pada penelitian ini, akan ditunjukkan bahwa W-product yang dipandang sebagai semigrup restriksi dapat disisipkan (embed) ke dalam suatu semidirect product. Misalkan T monoid yang beraksi kiri pada semilattice Y, serta $Y \rtimes T$ menotasikan semidirect product dari Y oleh T. Jika Y mempunyai elemen identitas dan T beraksi dari kiri dan kanan pada Y yang memenuhi kondisi compatibility, maka suatu subsemigrup $Y *_m T$ dari $Y \rtimes T$ merupakan semigrup restriksi sejati. Hal ini ditunjukkan pada Lemma berikut.

Misalkan T monoid dan Y semilattice dengan elemen identitas ε serta " $\leq$ " relasi urutan parsial pada Y. Monoid T dikatakan beraksi ganda (acting doubly) pada Y, jika T beraksi oleh homomorfisma pada Y dari kiri (melalui ".") dan kanan (melalui "o"), serta kedua kondisi compability berikut berlaku, yaitu

$$(t \cdot e) \circ t = \varepsilon \circ t \wedge e \quad \text{dan} \quad t \cdot (e \circ t) = e \wedge t \cdot \varepsilon$$

untuk semua $t \in T$, $e \in Y$.

Lemma 5.1 (5)**.** *Misalkan T monoid yang beraksi ganda pada semilattice Y dengan elemen identitas ε. Himpunan*

$$Y *_m T = \{(e, t) : e \leq t \cdot \varepsilon\} \subseteq Y \rtimes T$$

merupakan monoid restriksi sejati dengan elemen identitas $(\varepsilon, 1)$ sedemikian sehingga

$$(e, t)^+ = (e, 1) \quad \text{dan} \quad (e, t)^* = (e \circ t, 1),$$

untuk semua $t \in T$, $e \in Y$.

Bukti. Diketahui T beraksi ganda pada Y dengan elemen identitas ε. Artinya, T beraksi kiri "$\cdot$" sekaligus beraksi kanan "$\circ$" pada Y dan kondisi compatibility berlaku. Akan ditunjukkan $Y *_m T$ monoid restriksi sejati. Diambil sebarang $(e,t),(f,s),(g,u) \in Y *_m T$. Diperhatikan $(e,t)(f,s) = (e \wedge t \cdot f, ts)$. Karena $(f,s) \in Y *_m T$, berarti $f \leq s \cdot \varepsilon$. Selain itu, karena " " aksi kiri yang mengawetkan urutan, didapat $t \cdot f \leq t \cdot (s \cdot \varepsilon) = (ts) \cdot \varepsilon$. Akibatnya, diperoleh $e \wedge t \cdot f \leq (ts) \cdot \varepsilon$. Jadi, $Y *_m T$ tertutup terhadap operasi perkalian (di $Y \rtimes T$) tersebut. Kemudian dapat ditunjukkan bahwa $((e,t)(f,s))(g,u) = (e,t)((f,s)(g,u))$, sehingga $Y *_m T$ merupakan semigrup.

Lebih lanjut, untuk sebarang $(e,t) \in Y *_m T$ berlaku $(e,t)(\varepsilon,1) = (e,t) = (\varepsilon,1)(e,t)$. Dengan demikian, terbukti bahwa $Y *_m T$ merupakan monoid dengan elemen identitas $(\varepsilon,1)$. Selanjutnya, dapat ditunjukkan pula bahwa $Y *_m T$ memenuhi aksioma-aksioma dari definisi semigrup restriksi. Kemudian dengan relasi kongruensi terkecil σ (yang mengidentifikasi semua elemen di $P(Y \rtimes T)$) pada $Y \rtimes T$, didapat bahwa $Y *_m T$ merupakan monoid restriksi sejati. □

Selanjutnya, jika T beraksi ganda pada Y seperti di atas, maka dengan tambahan sifat yaitu $t \cdot \varepsilon = \varepsilon$ untuk semua $t \in T$, berlaku

$$Y *_m T = \{(e,t) : e \leq t \cdot \varepsilon\} = Y \rtimes T.$$

Misalkan diambil sebarang $(e,t) \in Y \rtimes T$. Karena $e \leq \epsilon$ dan $t \cdot \epsilon = \epsilon$, didapat $e \leq t \cdot \epsilon$. Dengan demikian, $(e,t) \in Y *_m T$, sehingga terbukti bahwa $Y *_m T = Y \rtimes T$. Oleh karena itu, $Y \rtimes T$ merupakan monoid restriksi sejati dengan $(e,t)^+ = (e,1)$ dan $(e,t)^* = (e \circ t, 1)$.

Teorema 5.2 (5)**.** *Misalkan $W(T,Y)$ adalah W-product dan $\overline{\mathcal{Y}}$ menotasikan semilattice ideal-ideal urutan dari Y dibawah operasi irisan himpunan. Dengan demikian, berlaku T beraksi ganda pada $\overline{\mathcal{Y}}$ sedemikian sehingga $t \cdot Y = Y$ untuk semua $t \in T$, dan $W(T,Y)$ dapat disisipkan (embed) ke dalam $\overline{\mathcal{Y}} \rtimes T$.*

Bukti. Diketahui $W(T,Y)W$-product dan $\overline{\mathcal{Y}} = \{I : I \text{ ideal urutan dari } Y\}$. Himpunan $\overline{\mathcal{Y}}$ terhadap operasi irisan himpunan membentuk semilattice. Akan ditunjukkan bahwa (i) T beraksi ganda pada $\overline{\mathcal{Y}}$ sedemikian sehingga $t \cdot Y = Y$ untuk semua $t \in T$, serta (ii) dan $W(T,Y)$ dapat disisipkan ke dalam $\overline{\mathcal{Y}} \rtimes T$.

(i) Akan ditunjukkan T beraksi ganda pada $\overline{\mathcal{Y}}$. Diperhatikan bahwa Y merupakan elemen identitas di $\overline{\mathcal{Y}}$, sebab untuk setiap $I \in \overline{\mathcal{Y}}$ berlaku $I \cap Y = I = Y \cap I$. Selanjutnya, didefinisikan pemetaan $\bullet : T \times \overline{\mathcal{Y}} \to \overline{\mathcal{Y}}$, dengan $t \bullet I := \{a : a \circ t \in I\}$, untuk setiap $t \in T, I \in \overline{\mathcal{Y}}$. Cukup jelas bahwa $t \bullet I$ merupakan ideal urutan dari $\overline{\mathcal{Y}}$, sehingga pemetaan $\bullet$ *well defined*. Lebih lanjut, dapat ditunjukkan bahwa "$\bullet$" merupakan aksi kiri oleh homomorfisma. Kemudian, untuk sebarang $t \in T$ berlaku $t \bullet Y = \{a : a \circ t \in Y\} = Y$.

Selanjutnya, didefinisikan pemetaan $\star : \overline{\mathcal{Y}} \times T \to \overline{\mathcal{Y}}$, dengan $I \star t := \{a \circ t : a \in I\}$, untuk setiap $t \in T, I \in \overline{\mathcal{Y}}$. Cukup jelas bahwa $I \star t$ merupakan ideal urutan dari $\overline{\mathcal{Y}}$, sehingga pemetaan $\star$ well defined. Kemudian dapat ditunjukkan pula bahwa " " merupakan aksi kanan oleh homomorfisma. Lebih lanjut, dapat ditunjukkan bahwa kondisi *compatibility* dipenuhi. Dengan demikian, T beraksi ganda pada $\overline{\mathcal{Y}}$. Kemudian, karena T beraksi ganda pada $\overline{\mathcal{Y}}$ dan $t \bullet Y = Y, \forall t \in T$, berdasarkan Lemma 5.1, didapat $\overline{\mathcal{Y}} \rtimes T$ merupakan semigrup restriksi sejati.

(ii) Akan ditunjukkan $W(T,Y)$ dapat disisipkan (embed) ke dalam $\overline{\mathcal{Y}} \rtimes T$. Didefinisikan pengaitan $\phi : W(T,Y) \to \overline{\mathcal{Y}}xT$ dengan $\phi((t, a \circ t)) := (\langle a \rangle, t)$, untuk setiap $(t, a \circ t) \in W(T,Y)$. Cukup jelas bahwa ϕ well defined, mengingat " $\circ$" aksi oleh homomorfisma. Selanjutnya, akan ditunjukkan ϕ injektif. Diambil sebarang $(t, a \circ t), (s, b \circ s) \in W(T,Y)$ dengan $\phi((t, a \circ t)) = \phi((s, b \circ s))$. Diperhatikan $\phi((t, a \circ t)) = \phi((s, b \circ s))$, berarti $(\langle a \rangle, t) = (\langle b \rangle, s)$. Akibatnya, $a = b$ dan $t = s$. Lebih lanjut, akan ditunjukkan ϕ merupakan homomorfisma. Diambil sebarang $(t, a \circ t), (s, b \circ s) \in W(T,Y)$. Diperhatikan untuk $a \circ t \wedge b$, jelas bahwa $a \circ t \wedge b \leq a \circ t$. Akibatnya, karena (T,Y) merupakan W - pair, didapat $a \circ t \wedge b = c \circ t$ untuk suatu $c \in Y$, dengan c tunggal. Kemudian, untuk sebarang $x \in Y$ diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x \in \langle c \rangle &\Leftrightarrow x \leq c \\ &\Leftrightarrow x \circ t \leq c \circ t \\ &\Leftrightarrow x \circ t \leq a \circ t \wedge b \\ &\Leftrightarrow x \circ t \leq a \circ t \text{ dan } x \circ t \leq b \\ &\Leftrightarrow x \leq a \text{ dan } x \circ t \in \langle b \rangle \\ &\Leftrightarrow x \in \langle a \rangle \text{ dan } x \in t \bullet \langle b \rangle \\ &\Leftrightarrow x \in \langle a \rangle \cap t \bullet \langle b \rangle. \end{aligned}$$

Akibatnya, didapat $\phi((t, a \circ t)(s, b \circ s)) = \phi((t, a \circ t))\phi((s, b \circ s))$. Selanjutnya, untuk sebarang $a \in Y$ dan $t \in T$ diperoleh

$$\begin{aligned} b \in \langle a \circ t \rangle \Leftrightarrow b \leq a \circ t &\Leftrightarrow b = c \circ t (\text{ untuk suatu } c \in Y \text{ dengan } c \leq a) \\ &\Leftrightarrow b \in \langle a \rangle \star t. \end{aligned}$$

Oleh karena itu, untuk sebarang $(t, a \circ t) \in W(T,Y)$ berlaku $(\phi((t, a \circ t)))^+ = \phi\left((t, a \circ t)^+\right)$dan $(\phi((t, a \circ t)))^* = \phi\left((t, a \circ t)^*\right)$. Jadi, terbukti bahwa ϕ merupakan monomorfisma. Dengan kata lain, $W(T,Y)$ dapat disisipkan ke dalam $\overline{\mathcal{Y}} \rtimes T$.

□

Berikut diberikan hubungan antara W - product dan semidirect product dari semilattice oleh monoid.

Teorema 5.3 (5)**.** *Misalkan T monoid yang beraksi ganda pada semilattice Y dengan elemen identitas ε, sedemikian sehingga $t \cdot \varepsilon = \varepsilon$ untuk semua $t \in T$. Himpunan (T,Y) merupakan W-pair dan semidirect product $Y \rtimes T$ isomorfis dengan $W(T,Y)$.*

Bukti. Diketahui T beraksi ganda pada Y dengan elemen identitas ε, sedemikian sehingga $t \cdot \varepsilon = \varepsilon$ untuk semua $t \in T$. Oleh karena itu, berdasarkan kondisi compatibility didapat

$$(t \cdot e) \circ t = e \wedge \varepsilon \circ t \quad \text{ dan } \quad t \cdot (e \circ t) = e \wedge t \cdot \varepsilon = e,$$

untuk semua $t \in T, e \in Y$.

Selanjutnya, jika diambil sebarang $a, b \in Y$ dan $t \in T$, maka berlaku jika $a \circ t = b \circ t$ didapat $a = t \cdot (a \circ t) = t \cdot (b \circ t) = b$. Lebih lanjut, untuk sebarang $c \in Y$ berlaku

$c = (t \cdot t) \circ t = c \wedge \varepsilon \circ t$, sehingga $c \leq \varepsilon \circ t$. Oleh karena itu, jika $c \leq a \circ t$, maka didapat $(t \cdot t) \circ t = c \wedge \varepsilon \circ t = c$. Dengan demikian, (T, Y) merupakan W-pair.

Lebih lanjut, akan ditunjukkan $Y \rtimes T$ isomorfis dengan $W(T, Y)$. Didefinisikan pemetaan $\theta : Y \rtimes T \longrightarrow W(T, Y)$ dengan

$$\theta(a, t) := (t, a \circ t)$$

untuk setiap $(a, t) \in Y \rtimes T$. Akan ditunjukkan θ merupakan isomorfisma semigrup (restriksi). Diambil sebarang $(a, t), (b, s) \in Y \rtimes T$ dengan $\theta((a, t)) = \theta((b, s))$. Berarti $(t, a \circ t) = (s, b \circ s)$, sehingga berdasarkan sifat dari W-pair (jika $a \circ t = b \circ t$, maka $a = b$) didapat $(a, t) = (b, s)$. Dengan kata lain, θ injektif. Kemudian untuk sebarang $(t, a \circ t) \in W(T, Y)$, terdapat $(a, t) \in Y \rtimes T$ sedemikian sehingga $\theta((a, t)) = (t, a \circ t)$. Jadi, terbukti bahwa θ merupakan pemetaan bijektif.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa θ homomorfisma semigrup (restriksi). Diambil sebarang $(a, t), (b, s) \in Y \rtimes T$. Berlaku bahwa $\theta((a, t)(b, s)) = \theta((a, t)), \theta((b, s))$, $\theta((a, t)^+) = (\theta((a, t)))^+$, dan $\theta((a, t)^*) = (\theta((a, t)))^*$. Jadi, terbukti bahwa θ merupakan isomorfisma semigrup (restriksi). □

6. PENUTUP

Pada semigrup restriksi sejati dapat aksi parsial sedemikian sehingga didapat struktur dari semigrup restriksi sejati tersebut. Pada penulisan ini, dipaparkan pula lebih lanjut tentang kelas-kelas dari semigrup restriksi serta suatu $W - product$ yang merupakan semigrup restriksi sejati yang dapat disisipkan ke dalam *semidirect product.* Selain itu, dari suatu aksi parsial monoid kuat dapat dikonstruksi aksi (global) monoid.

Untuk penelitian ke depannya, diharapkan dapat diberikan hubungan antar kelas dari semigrup restriksi sejati dan juga diberikan syarat perlu dan cukup semigrup restriksi sejati dapat disisipkan ke dalam *semidirect product.*

Ucapan terima kasih*. Terima kasih sebesar-besarnya kepada Kudryavtseva, G. atas penelitiannya yang menjadi sumber inspirasi utama dalam penulisan ini.

Referensi

[1] Cornock, C., *Restriction Semigroups: Structure, Varieties, and Presentations*, University of York, 2011.

[2] Cornock, C., dan Gould, V., Proper Restriction Semigroups and Partial Action, J. *Pure Applied Algebra* 216 (2012), 935-949

[3] Gould, V., Notes on Restriction Semigroups and Related Structures (Formerly (Weakly) Left E-ample Semigroups), 1991 *Mathematics Subject Classification* 20 M 10, 2010.

[4] Gould, V., dan Hollings, C., Partial Action of Inverse and Weakly Left E-ample Semigroups, *J. Aust. Math. Soc.* 86 (2009), 355-377.

[5] Gould, V., dan Szendrei, M. B., Proper Restriction Semigroups - Semidirect Product and Wproduct, *Acta Math. Hungar.* 141 (1-2) (2013), 36-57.

[6] Hollings, C., Partial Actions of Monoids, *Semigroup Forum* 75(2) (2007), 293-316.

[7] Kudryavtseva, G., Partial Monoid Action and a Class of Restriction Semigroups, *Journal of Algebra* 429 (2015), 342-370.

[8] Megrelishvili, M., dan Schröder, L., Globalisation of Confluent Partial Action on Topological and Metric Spaces, *Topology Appl.* 145 (2004), 119-145

[9] Szendrei, M. B., Embedding into Almost Left Factorizable Restriction Semigroups, *Comm. Algebra* 41 (2013), 1458-1483.

LISANATUN KASANAH* (Penulis Korespondensi)
Departemen Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Gadjah Mada, Indonesia
lisanatun.kasanah@mail.ugm.ac.id

BUDI SURODJO
Departemen Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Gadjah Mada, Indonesia
surodjo_b@ugm.ac.id