Jurnal Matematika Thales (JMT): 2019
Vol. 01– 01

RING RING YANG MEMILIKI MODUL *INDIGENT*

(RINGS WHICH HAVE AN INDIGENT MODULE)

MOHAMMAD AGUNG, INDAH EMILIA WIJAYANTI

Abstrak. Diberikan modul M dan N, M dikatakan N-subinjketif jika untuk setiap perluasan K dari N, setiap homomorfisma $f : N \to M$ dapat diperluas menjadi homomorfisma $g : K \to M$. Daerah subinjektifitas suatu modul M merupakan koleksi seluruh modul N sehingga M merupakan N-subinjektif. Modul *indigent* merupakan modul yang daerah subinjektifitasnya hanya terdiri dari modul-modul injektif saja. Pada tulisan ini dibahas mengenai beberapa sifat tentang daerah subinjektifitas suatu modul dan beberapa sifat dari modul *indigent*. Diberikan pula beberapa contoh ring yang memiliki modul *indigent*.

Kata-kata kunci: modul injektif, daerah subinjektifitas, modul *indigent*, Jacobson radikal

Abstract. An indigent module is a module in which its subinjectivity domain consists only injective modules. We give some properties of indigent module and some rings which have an indigent module. Afterwards, we give a relationship between the concepts of subinjectivity domain of a module and indigent module with the category of all modules over a ring R. In this case, we give a construction of a functor that preserves subinjectivity domain of a module and preserve indigent module. Further, we give some corollaries related to some properties of indigent module.

Keywords: Injective module, indigent module, Jacobson radical, subinjectivity domain.

1 PENDAHULUAN

Diberikan ring R. Suatu modul R-modul M merupakan modul K-injektif atau injektif relatif terhadap K jika dan hanya jika untuk setiap submodul N dari K, sebarang homomorfisma $f : N \longrightarrow M$ dapat diperluas menjadi homomorfisma $g : K \longrightarrow M$. Berdasarkan gagasan mengenai modul yang injektif relatif terhadap suatu modul, untuk suatu R-modul M, dapat dibentuk kelas modul-modul K atas R sehingga M merupakan modul K-injektif yang kemudian disebut dengan daerah injektifitas dari M, dan dinotasikan sebagai $\mathfrak{In}^{-1}(M)$. Lebih jelasnya

2010 Mathematics Subject Classification:

$\mathfrak{In}^{-1}(M) = \{N \in R - MOD \mid M$ modul N -injektif$\}$, dengan $R - MOD$ menyatakan kelas seluruh modul atas ring R. Berdasarkan definisi dari modul injektif, maka suatu R-modul M merupakan modul injektif jika dan hanya jika daerah injektifitas dari M adalah seluruh modul atas R. Berdasarkan fakta ini, maka modul injektif dapat dipandang sebagai modul yang kaya, dalam hal daerah injektifitas. Sebagai lawan dari gagasan ini, maka didefinisikan modul yang miskin dalam hal daerah injektifitas, yakni modul yang daerah injektifitasnya sekecil mungkin, yang kemudian dalam paper yang ditulis oleh Alahmadi,dkk (2010)[1] disebut dengan modul miskin.

Sebagai pandangan alternatif dari konsep modul yang injektif relatif terhadap modul lain, Pinar,dkk (2011)[2] mendefinisikan konsep mengenai modul subinjektif relatif. Suatu R-modul M disebut modul N-subinjektif, atau subinjektif relatif terhadap N jika untuk setiap perluasan K dari N, sebarang homomorfisma $f : N \longrightarrow M$ dapat diperluas menjadi homomorfisma $g : K \longrightarrow M$. Seperti halnya pada konsep tentang daerah injektifitas dari suatu modul, dapat pula didefinisikan konsep tentang daerah subinjektifitas suatu modul M, yakni koleksi R-modul K sehingga M merupakan modul K-subinjektif. Daerah subinjektifitas dari suatu modul M dinotasikan dengan $\underline{\mathfrak{In}}^{-1}(M)$.

Jika diperhatikan kembali definisi modul injektif, diperoleh, suatu modul M merupakan modul injektif jika dan hanya jika daerah subinjektifitas dari M adalah seluruh modul-modul atas R. Sehingga, dalam hal daerah subinjektifitas pun, modul injektif dapat dipandang sebagai modul yang kaya. Hal ini yang memunculkan gagasan mengenai modul miskin dalam hal daerah subinjektifitas, yakni modul yang daerah subinjektifitasnya sekecil mungkin. Secara ekivalen, suatu modul M memiliki daerah subinjektifitas sekecil mungkin jika daerah subinjektifitasnya merupakan irisan dari daerah subinjektifitas modul-modul atas R. Modul yang memenuhi kondisi ini disebut dengan modul *indigent*.

Seperti halnya konsep subinjektif relatif yang merupakan perspektif alternatif dari konsep injektif relatif, konsep modul indigent juga merupakan perspprektif lain dari modul miskin. Pada penelitian terdahulu, telah ditunjukkan bahwa sebarang ring R memiliki modul miskin. Namun, untuk kasus modul indigent, eksistensinya atas sebarang ring belum diketahui. Pada tulisan ini akan diberikan beberapa contoh ring yang memiliki modul *indigent*.

Pada keseluruhan tulisan ini, yang dimaksud ring R adalah ring asosiatif dengan satuan, dan semua modul merupakan modul unital. Untuk sebarang R-modul M, $E(M)$ menyatakan amplop injektif dari M, dan Jacobson radikal dari ring R dinotasikan dengan $J(R)$.

2 DAERAH SUBINJEKTIFITAS SUATU MODUL DAN MODUL *INDIGENT*

Hasil-hasil berikut dapat ditemukan pada [2].

Definisi 2.1. [Pinar, dkk., 2011] *Diberikan R-modul M dan N. Modul M dikatakan subinjektif relatif terhadap modul N, atau N-subinjektif jika, untuk setiap homomorfisma modul $f : N \longrightarrow M$ dan untuk setiap perluasan K dari N terdapat homomorfisma $g : K \longrightarrow M$ sehingga $g\,|_N = f$.*

Teorema 2.2. [Pinar, dkk., 2011] *Untuk sebarang R-modul M dan N, pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen:*

(i). Modul M adalah modul N-subinjektif;

(ii). Untuk setiap homomorfisma $f : N \longrightarrow M$ dan untuk setiap perluasan essensial K dari N, terdapat homomorfisma $g : K \longrightarrow M$ sehingga $g\,|_N = f$;

(iii). Untuk setiap homomorfisma $f : N \longrightarrow M$ terdapat homomorfisma $g : E(N) \longrightarrow M$ sehingga $g\,|_N = f$;

(iv). Untuk setiap homomorfisma $f : N \longrightarrow M$ terdapat perluasan injektif E dari N, dan homomorfisma $g : E \longrightarrow M$ sehingga $g\,|_N = f$.

Bukti. Bukti untuk $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv)$ cukup jelas. Tinggal ditunjukkan bahwa $(iv) \Rightarrow (i)$. Diberikan sebarang monomorfisma $\varepsilon : N \longrightarrow K$ dan homomorfisma $\varphi : N \longrightarrow M$. Misal E adalah perluasan injektif dari N, maka terdapat homomorfisma $f : K \longrightarrow E$ sehingga $f \circ \varepsilon = i$ dimana $i : N \longrightarrow E$ adalah inklusi. Menurut hipotesis, terdapat homomorfisma $g : E \longrightarrow M$ sehingga $g \circ i = \varphi$. Diperoleh homomorfisma $g \circ f : K \longrightarrow M$ dengan sifat $(g \circ f) \circ \varepsilon = g \circ (f \circ \varepsilon) = g \circ i = \varphi$. Jadi M merupakan modul subinjektif. □

Seperti halnya konsep tentang daerah injektifitas suatu modul, dapat didefinisikan pula daerah subinjektifitas suatu modul.

Definisi 2.3. [Pinar, dkk., 2011] *Diberikan R-modul M. Daerah subinjektifitas dari M, dinotasikan dengan $\underline{\mathfrak{In}}^{-1}(M)$, didefinisikan sebagai koleksi seluruh R-modul N sehingga M merupakan modul N-subinjektif.*

Proposisi berikut merupakan motivasi utama dalam pendefinisian modul *indigent.*

Proposisi 2.4. [Pinar, dkk., 2011] *Diberikan sebarang ring R, maka berlaku*

$$\bigcap_{M \in R-MOD} \underline{\mathfrak{In}}^{-1}(M) = R - Inj$$

dengan $R - Inj$ merupakan kelas seluruh modul injektif atas R.

Definisi 2.5. [Pinar, dkk., 2011] *Suatu R-modul M disebut modul indigent jika $\underline{\mathfrak{In}}^{-1}(M) = R - Inj$*

Sebagai akibat dari [[2], Proposition 2.4] diperoleh hasil berikut.

Proposisi 2.6. *Diberikan keluarga R-modul* $\{M_\lambda\}_\Lambda$. *Jika terdapat* $\lambda \in \Lambda$ *sedemikian sehingga* M_λ *merupakan modul indigent, maka*

(i). $\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ *merupakan modul indigent.*

(ii). $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ *merupakan modul indigent.*

Bukti. (i). Misal $L = \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$. Jika $K \in \underline{\mathfrak{In}}^{-1}(L)$, maka $K \in \underline{\mathfrak{In}}^{-1}(M_\lambda)$. Hal ini berakibat K merupakan modul injektif. Sehingga $L = \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ adalah modul *indigent*.

(ii). Bukti sejalan dengan bukti pada (i). □

3 BEBERAPA RING YANG MEMILIKI MODUL *INDIGENT*

Tidak seperti modul miskin, eksistensi modul *indigent* atas sebarang ring masih belum diketahui. Pada bagian ini, diberikan beberapa contoh ring di mana modul *indigent* eksis.

Teorema 3.1. [Pinar, dkk., 2011] *Untuk sebarang ring R, pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen*

(i). R ring Artin semisederhana

(ii). Setiap R-modul tak nol merupakan modul indigent

(iii). Terdapat modul indigent yang merupakan modul injektif

(iv). $\{0\}$ *merupakan modul indigent*

(v). R memiliki modul indigent dan sebarang penjumlah langsung dari suatu modul indigent merupakan modul indigent

(vi). R memiliki modul indigent dan sebarang modul faktor tak nol dari modul indigent merupakan modul indigent

Bukti. Jika pernyataan (i) berlaku, maka semua modul atas R merupakan modul injektif, sehingga pernyataan $(ii), (iii), (iv), (v)$, dan (vi) juga berlaku.

Akan ditunjukkan bahwa berlaku implikasi $(vi) \Rightarrow (v) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$. Misal pernyataan (vi) berlaku, berarti R memiliki modul indigent, sebut M. Diambil sebarang R-modul N, N' dengan $M = N \oplus N'$. Berakibat $N \cong M/N'$ dan $N' \cong M/N$, sehingga menurut (vi), N dan N, merupakan modul indigent. Jadi, $(vi) \Rightarrow (v)$. Selanjutnya, misal pernyataan (v) berlaku. Misal M adalah R-modul indigent. Diambil sebarang R-modul N. Diperhatikan bahwa $P = M \oplus N$ merupakan modul indigent, sehingga, menurut (v), N merupakan modul indigent. Jika pernyataan (ii) berlaku, maka jelas bahwa pernyataan (iii) juga berlaku. Jadi, berlaku $(vi) \Rightarrow (v) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa berlaku $(iv) \Rightarrow (iii)$. Misal (iv) berlaku. Karena $\{0\}$ merupakan modul injektif, maka $\{0\}$ adalah modul indigent yang merupakan modul injektif. Jadi $(iv) \Rightarrow (iii)$.

Terakhir, akan ditunjukkan bahwa $(iii) \Rightarrow (i)$. Misal (iii) berlaku. Misal M adalah modul indigent injektif. Karena M modul indigent, maka diperoleh $R - MOD = \underline{\mathfrak{In}}^{-1}(M)$. Di lain pihak, karena M merupakan modul injektif,maka $\underline{\mathfrak{In}}^{-1}(M) = R{-}Inj$. Jadi, sebarang R-modul N merupakan modul injektif. Berarti $R{-}MOD = R - Inj$. Dengan kata lain, sebarang modul atas R merupakan modul injektif, sehingga R merupakan ring semisederhana. □

Teorema 3.2. [Pinar, dkk., 2011] *Diberikan sebarang ring R. Jia suatu R-modul M merupakan modul injektif jika dan hanya jika $Rad(M) = M$, maka R memiliki modul indigent semisederhana.*

Bukti. Misal $S = \bigoplus_{i \in I} S_i$ dengan I adalah sebarang himpunan representatif lengkap modul sederhana. Misal M adalah modul yang tidak injektif. Berdasarkan hipotesis, $Rad(M) \neq M$, yang berarti M memiliki submodul maksimal, sebut N. Karena N submodul maksimal, maka $M/N \cong S_i$ untuk suatu $i \in I$. Karena S_i modul sederhana, maka $Rad(S_i) = 0$. Diambil sebarang homomorfisma tak nol $f : M \longrightarrow S_i$. Karena S_i modul sederhana, maka f merupakan epimorfisma. Di lain pihak untuk sebarang homomorfisma $g : E(M) \longrightarrow S_i$ berlaku $g(E(M)) = g(Rad(E(M))) \subseteq Rad(S_i) = 0$. Hal ini berarti $Hom(E(M), S_i) = 0$, berakibat $M \notin \underline{\mathfrak{In}}^{-1}(S)$. Disimpulkan $\underline{\mathfrak{In}}^{-1}(S) = R - Inj$. Jadi, S adalah modul *indigent* semisederhana. □

Sebagai konsekuensi dari teorema di atas, diperoleh hasil berikut.

Proposisi 3.3. *Ring seluruh bilangan bulat $\mathbb{Z}$ memiliki modul indigent semisederhana.*

Bukti. Pertama akan ditunjukkan terlebih dahulu bahwa sebarang $\mathbb{Z}$-modul (grup Abelian) sederhana isomorfis dengan $\mathbb{Z}_p$ untuk suatu bilangan prima p. Diambil sebarang grup Abelian sederhana tak nol G. Karena G sederhana, maka G cyclic. Jika G tak hingga, maka $G \simeq \mathbb{Z}$, tetapi $\mathbb{Z}$ bukan grup Abelian sederhana, sehingga disimpulkan G berhingga. Akibatnya $G \simeq \mathbb{Z}_p$ untuk suatu bilangan prima p.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa, suatu grup Abel G merupakan modul divisibel jika dan hanya jika G tidak memiliki subgrup maksimal. Jika G bukan modul divisibel, maka terdapat bilangan prima p sehingga $pG \subset G$. Sehingga G/pG merupakan ruang vektor atas $\mathbb{Z}_p$. Misal $X = \{x_i\}_{i \in I}$ merupakan basis G/pG untuk suatu himpunan indeks I. Diambil $x_j \in X$, maka $span\{x_i,\ i \neq j\}$ merupakan subruang maksimal G/pG. Menurut teorema korespondensi, $span\{x_i,\ i \neq j\} = H/pG$ untuk suatu subgrup H yang memuat pG. Karena H/pG merupakan subgrup maksimal G/pG, maka H merupakan subgrup maksimal G. Disimpulkan G tidak memiliki subgrup maksimal berakibat G divisibel. Sebaliknya, misalkan G merupakan modul divisibel. Andaikan G memiliki subgrup maksimal, sebut H. Karena H maksimal, maka G/H merupakan grup sederhana, sehingga $G/H \simeq \mathbb{Z}_q$ untuk suatu prima q. Berakibat $qG \subseteq H$. Di lain pihak, karena G divisibel, maka $qG = G$, sehingga diperoleh $G = qG \subseteq H$, kontradiksi.

Jadi sebarang grup Abelian G merupakan $\mathbb{Z}$-modul injektif jika dan hanya jika G tidak memiliki submodul maksimal, dengan kata lain $Rad(G) = G$. Sehingga, menurut Teorema 3.2, $\bigoplus_{p \text{ prima}} \mathbb{Z}_p$ merupakan modul *indigent* atas $\mathbb{Z}$. $\square$

Ring Artin memiliki peran yang cukup penting dalam pembentukan modul *indigent*. Beberapa hasil yang akan dibahas selanjutnya memberikan hubungan ring Artin dengan eksistensi modul *indigent* atas ring tersebut.

Teorema 3.4. [Pinar, dkk., 2011] *Jika R merupakan ring serial Artin dengan $J(R)^2 = 0$ maka $R/J(R)$ merupakan modul indigent semisederhana atas R.*

Proposisi 3.5. *Diberikan dua bilangan prima p dan q (tidak harus berbeda). Ring $R = \mathbb{Z}_{p^2} \bigoplus \mathbb{Z}_{q^2}$ memiliki modul indigent.*

Bukti. Jelas bahwa untuk sebarang bilangan prima p, ring $\mathbb{Z}_{p^2}$ merupakan ring rantai Artin, dan $J(R) = \langle p \rangle$. Berarti, untuk sebarang bilangan prima p dan q, $R = \mathbb{Z}_{p^2} \bigoplus \mathbb{Z}_{q^2}$ merupakan ring serial Artin, dan $J(R) = \langle p \rangle \oplus \langle q \rangle$. Diambil sebarang $x, y \in J(R)$. Misal $x = (u_1p, u_2q)$ dan $y = (v_1p, v_2q)$. Maka $xy = (u_1v_1p^2, u_2v_2q^2) = (0, 0)$. Disimpulkan bahwa $J(R)^2 = 0$. Jadi ring $R = \mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_{q^2}$ merupakan ring serial Artin dengan $J(R)^2 = 0$. Sehingga menurut Teorema 3.4, $R/J(R) = \mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_{q^2}/\langle p \rangle \oplus \langle q \rangle$ merupakan modul *indigent* atas ring R. $\square$

Teorema 3.6. *[Pinar, dkk, 2011] Diberikan ring rantai Artin R dan R-modul M. Jika M bukan merupakan modul injektif, maka M merupakan modul indigent.*

Proposisi 3.7. *Diberikan sebarang bilangan prima p dan bilangan asli n. Dibentuk ring $S = \mathbb{Z}_{p^n}$ dan $M = S$ modul atas S. Sebarang submodul sejati dari M merupakan modul indigent.*

Bukti. Jelas bahwa S merupakan ring rantai Artin. Jika N merupakan sebarang submodul sejati dari M, maka $N = \langle p^m \rangle$ untuk suatu bilangan asli $m < n$. Jelas bahwa M merupakan perluasan esensial sejati dari N. Berarti N bukan S-modul injektif, sehingga menurut Teorema 3.6, N merupakan modul *indigent*. $\square$

4 PENUTUP

Pada tulisan ini, contoh-contoh ring yang memiliki modul *indigent* merupakan ring-ring dengan persyaratan tertentu yang cukup rumit, diharapkan, pada penelitian selanjutnya, dapat diberikan contoh-contoh ring yang memiliki modul indigent yang tidak memiliki syarat tertentu yang terlalu banyak dan rumit.

REFERENSI

[1] Alahmadi, A.N., Alkan, M. dan Lopez-Permouth, S.R., *Poor Modules: The Opposite of Injectivity*, Glasgow Math Journal, (2010) pp.7-17.

[2] Aydogdu, P, and Lopez-Permouth, S.R., *An Alternative Perspective on Injectivity of Modules*, Journal of Algebra, 338,(2011) 207-219.

[3] Noyan, E., Lopez-Permouth, S., dan Sokmez, N., *Ring Whose Modules have Maximal or Minimal Injectivity Domain*, Journal of Algebra, (2011) pp. 404-417.

Mohammad Agung
S2 Matematika, FMIPA, Universitas Gadjah Mada
agungmohammad55@gmail.com

Indah Emilia Wijayanti
Departemen Matematika FMIPA Universitas Gadjah Mada
ind_wijayanti@ugm.ac.id