Jurnal Matematika Thales (JMT): 2019
Vol. 01– 01

KODE DUAL DAN IDENTITAS MAC WILLIAMS PADA KODE ADITIF

(DUAL CODE AND MAC WILLIAMS IDENTITY ON ADDITIVE CODE)

Miftah Yuliati, Sri Wahyuni, Indah Emilia Wijayanti

Abstrak. Kode aditif adalah perumuman dari kode linear yang didefinisikan sebagai subgrup dari suatu grup Abel hingga. Pendefinisian jarak Hamming, bobot Hamming, pencacah bobot, dan pencacah bobot homogen pada kode aditif adalah sama dengan pendefinisiannya masing-masing pada kode linear. Sedangkan pendefinisian kode dual dari kode aditif tidak sama dengan pendefinisiannya pada kode linear yang mana kode dual dari suatu kode linear didefinisikan dengan menggunakan hasil kali dalam. Mengingat di dalam teori grup tidak terdapat istilah mengenai hasil kali dalam, maka di dalam paper ini dibahas mengenai pendefinisian-pendefinisian kode dual pada kode aditif. Kemudian dalam paper ini dibahas mengenai suatu teorema yang cukup terkenal di dalam teori dual dalam kode linear, yaitu teorema Identitas MacWilliams. Selanjutnya dibahas mengenai bagaimana bukti teorema Identitas MacWilliams pada kode aditif sesuai dengan kode dual-kode dual yang didefinisikan beserta konsep-konsep yang diperlukan dalam pembuktian tersebut.

Kata-kata kunci: Kode dual, Identitas MacWilliams, kode aditif, karakter aditif, karakter multiplikatif.

Abstract. Additive code is a generalization of linear code. It is defined as subgroup of a finite Abelian group. The definitions of Hamming distance, Hamming weight, weight distribution, and homogeneous weight distribution in additive code are similar with the definitions in linear code. Different with linear code where the dual code is defined using inner product, additive code using theories in group to define its dual code because in group theory we do not have term of inner product. So, by this paper, the definitions of dual code in additive code will be discussed. Then, this paper discuss about a familiar theorem in dual code theory, that is MacWilliams Identity. Next, this paper discuss about how to proof of MacWilliams Identity on adiitive code using dual codes which are defined.

Keywords: Dual code, MacWilliams Identity, additive code, additive character, multiplicative character.

2010 Mathematics Subject Classification: 20K99

1 PENDAHULUAN

Saat ini terdapat banyak sekali macam-macam kode yang dikonstruksi dengan kelebihan dan kelemahan masing-masing. Kode yang paling umum dijumpai adalah kode linear. Kode linear adalah subruang dari suatu ruang vektor atas lapangan hingga. Misalkan dipunyai ruang vektor F_q^n atas lapangan hingga F_q. Di dalam ruang vektor tersebut didefinisikan hasil kali dalam yang kemudian kode dual dari C didefinisikan sebagai himpunan semua elemen di F_q^n dengan sifat hasil kali dalamnya dengan seluruh elemen di C sama dengan nol.

Di dalam kode dual, terdapat satu teorema yang cukup terkenal, yakni teorema Identitas MacWilliams. Teorema ini memberikan informasi mengenai banyaknya kata kode dengan bobot tertentu di dalam kode dualnya. Pembuktian teorema Identitas MacWilliams pada kode linear ini tidak sederhana, diperlukan konsep mengenai teori karakter dan transformasi Hadamard.

Kode linear dapat digeneralisasi menjadi kode aditif yang merupakan subgrup dari suatu grup Abel hingga G^n. Kemudian muncul pertanyaan bagaimana pendefinisian kode dual dari suatu kode aditif, mengingat di dalam teori grup tidak terdapat istilah hasil kali dalam. Oleh karena itu, akan dibahas mengenai bagaimana pendefinisian kode dual dari suatu kode aditif dan bagaimana bukti Identitas MacWilliams pada kode aditif serta konsep-konsep apa saja yang diperlukan dalam pembuktian tersebut.

1.1 Kode Aditif

Definisi mengenai kode aditif, jarak Hamming, bobot Hamming, pencacah bobot, dan pencacah bobot homogen pada kode aditif berikut dapat dilihat di Wood [4].

Definisi 1.1. *Misalkan G adalah suatu grup Abel hingga. Kode aditif C panjang n atas G adalah subgrup dari G^n.*

Selanjutnya elemen-elemen di dalam G^n disebut sebagai kata-kata, sedangkan sebarang elemen di dalam kode aditif $C \leq G^n$ disebut sebagai kata kode.

Definisi 1.2. *Misalkan $\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{y}$ adalah kata-kata di dalam G^n. **Jarak Hamming** dari $\boldsymbol{x}$ ke $\boldsymbol{y}$ dinotasikan $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ didefinitionkan sebagai banyaknya tempat pada $\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{y}$ yang berbeda. Jika $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ dan $\boldsymbol{y} = (y_1, \cdots, y_n)$, maka*

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d(x_1, y_1) + \ldots + d(x_n, y_n)$$

dimana x_i dan y_i dianggap sebagai kata dengan panjang 1, dan

$$d(x_i, y_i) = \begin{cases} 1 & \textit{jika} \quad x_i \neq y_i \\ 0 & \textit{jika} \quad x_i = y_i \end{cases}$$

Definisi 1.3. *Misal* $\boldsymbol{a}$ *adalah suatu kata kode pada kode aditif* C *panjang* n *atas grup Abel hingga* G*, bobot Hamming* $\boldsymbol{a}$ *yang dinotasikan dengan* $wt(\boldsymbol{a})$ *didefinisikan sebagai berikut.*

$$wt(\boldsymbol{a}) = d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{0}) = \sum_{i=1}^{n} d(a_i, 0)$$

dengan $\boldsymbol{0} = (0, 0, ..., 0)$.

Definisi 1.4. *Diberikan kode aditif* C *dengan panjang* n *atas grup Abel hingga* G*. Pencacah bobot* C *didefinisikan sebagai polinomial*

$$W_C(Z) = \sum_{w=0}^{n} A_w Z^w.$$

Sedangkan pencacah bobot homogen C *didefinisikan sebagai*

$$W_C(X,Y) = \sum_{w=0}^{n} A_w X^{n-w} Y^w.$$

dimana $A_w = |\{c \in C | wt(c) = w\}|$*, yaitu banyaknya kata kode di* C *dengan bobot* w.

1.2 Karakter Aditif

Sebelum membahas karakter aditif, akan dibahas secara singkat mengenai karakter multiplikatif. Definisi karakter multiplikatif, grup karakter multiplikatif, dan karakter aditif berikut dapat dilihat di Wood [4].

Definisi 1.5. *Diberikan grup Abel hingga* G*. Karakter multiplikatif dari* G *adalah homomorfisma grup* $\chi : G \mapsto \mathbb{C}^\times$*, di mana* $\mathbb{C}^\times$ *merupakan grup multiplikatif bilangan-bilangan kompleks tak nol.*

Karakter-karakter multiplikatif dari grup G jika dihimpun membentuk suatu grup terhadap operasi perkalian fungsi.

Definisi 1.6. *Himpunan semua karakter dari suatu grup* G *disebut dengan grup karakter dari* G *kemudian dinotasikan dengan* $Hom_Z(G, \mathbb{C}^\times)$.

Definisi 1.7. *Misalkan* G *adalah suatu grup Abel hingga. Karakter aditif dari* G *adalah homomorfisma grup* $\chi : G \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Misalkan G adalah suatu grup siklik berorde n dengan n adalah bilangan bulat genap positif, katakan $n = 2m$ di mana $m \in \mathbb{Z}$, dan pembangun dari grup G adalah g. Untuk suatu j tertentu, $0 \le j \le n-1 = 2m-1$, homomorfisma grup $\psi_j : G \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ dengan definisi

$$\psi_j(g^k) = \frac{2jk}{n} + \mathbb{Z} = \frac{jk}{m} + \mathbb{Z}, \tag{1.1}$$

di mana $k = 0, 1, \cdots, n-1 = 2m-1$, merupakan karakter aditif dari grup siklik G berorde n di mana n adalah bilangan genap.

Kemudian, misalkan G adalah suatu grup siklik berorde n di mana n adalah bilangan ganjil, katakan $n = 2m+1$, di mana $m \in \mathbb{Z}$, dan pembangun dari grup G adalah g. Untuk suatu j tertentu, $0 \leq j \leq n-1 = 2m$, homomorfisma grup $\psi'_j : G \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ dengan definisi

$$\psi'_j(g^k) = \frac{jk}{2m+1} + \mathbb{Z}, \tag{1.2}$$

di mana $k = 0, 1, \cdots, n-1 = 2m$, merupakan karakter aditif dari grup siklik G berorde n di mana n adalah bilangan ganjil.

Selanjutnya, misalkan G adalah suatu grup siklik berorde n dengan pembangunnya adalah elemen g dan ψ adalah sebarang karakter aditif dari grup G dengan

$$\psi(g^k) = \frac{2k}{n} + \mathbb{Z} \text{ untuk } |G| \text{ adalah bilangan genap}$$

dan

$$\psi(g^k) = \frac{k}{n} + \mathbb{Z} \text{ untuk } |G| \text{ adalah bilangan ganjil,}$$

maka $\psi(g^k)$ adalah akar jumlahan ke-$|G|$ dari $0 + \mathbb{Z}$ di dalam grup $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Teorema dasar *fundamental* grup Abel hingga mengatakan bahwa setiap grup Abel hingga merupakan jumlahan langsung grup-grup siklik berorde prima berpangkat. Di sisi lain, setiap grup siklik berorde n isomorfik dengan grup siklik $\mathbb{Z}_n$. Oleh karena itu, setiap grup Abel hingga isomorfik dengan bentuk

$$\mathbb{Z}_{p_1^{n_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p_2^{n_2}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{n_k}}. \tag{1.3}$$

Jika didefinisikan $\psi_{r_1, r_2, \cdots, r_k}(x_1, x_2, \cdots, x_k) = \psi_{r_1}(x_1) + \psi_{r_2}(x_2) + \cdots + \psi_{r_k}(x_k)$, maka rumus karakter aditif dari suatu grup Abel hingga adalah sebagai berikut.

Misalkan $p_l = 2$ untuk suatu $l \in \{1, 2, \cdots, k\}$, karakter aditif dari bentuk (1.3) adalah

$$\begin{aligned}\psi_{r_1, r_2, \cdots, r_k}(x_1, x_2, \cdots, x_k) &= \psi_{r_1}(x_1) + \psi_{r_2}(x_2) + \cdots + \psi_{r_k}(x_k) \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} \psi_{r_j}(x_j) + \psi_{r_l}(x_l) = \Big(\sum_{j=1}^{k-1} \frac{r_j x_j}{p_j^{n_j}} + \mathbb{Z}\Big) + \Big(\frac{r_l x_l}{2^{n_l - 1}}\Big).\end{aligned}$$

Selanjutnya, misalkan $p_j \neq 2$ untuk semua $j = 1, 2, \cdots, k$, karakter aditif dari bentuk (1.3) adalah

$$\begin{aligned}\psi_{r_1, r_2, \cdots, r_k}(x_1, x_2, \cdots, x_k) &= \psi_{r_1}(x_1) + \psi_{r_2}(x_2) + \cdots + \psi_{r_k}(\bar{}_k) \\ &= \sum_{j=1}^{k} \psi_{r_j}(x_j) = \sum_{j=1}^{k} \frac{r_j x_j}{p_j^{n_j}} + \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Wood [4] mengatakan bahwa fungsi eksponensial kompleks mendefinisikan homomorfisma injektif $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^\times$ dengan $\frac{a}{b}+\mathbb{Z} \mapsto e^{2\pi i \frac{a}{b}}$. Kemudian fungsi eksponensial membangkitkan suatu homomorfisma grup $Hom_\mathbb{Z}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to Hom_\mathbb{Z}(G, \mathbb{C}^\times)$ dengan $\varphi \mapsto e^{2\pi i\varphi}$. Ketika G berhingga, homomorfisma grup ini merupakan suatu isomorfisma. Dengan kata lain, $Hom_\mathbb{Z}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong Hom_\mathbb{Z}(G, \mathbb{C}^\times)$. Oleh karena itu, sifat-sifat pada karakter multiplikatif juga terpenuhi pada karakter aditif, yaitu

$$G \cong Hom_\mathbb{Z}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \tag{1.4}$$

$$|G| = |Hom_\mathbb{Z}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})| \tag{1.5}$$

$$Hom_\mathbb{Z}(G_1 \times G_2, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong Hom_\mathbb{Z}(G_1, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \times Hom_\mathbb{Z}(G_2, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \tag{1.6}$$

$$\sum_{g\in G} \psi(g) = 0 + \mathbb{Z} \tag{1.7}$$

$$\sum_{\psi\in Hom_\mathbb{Z}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})} \psi(g) = 0 + \mathbb{Z}. \tag{1.8}$$

Sedangkan untuk jumlahan fungsi eksponensial dari grup aditif, dipunyai

$$\sum_{g\in G} e^{2\pi i\psi(g)} = \begin{cases} |G| & \text{ketika} \quad \psi \quad \text{adalah karakter utama (principal)} \\ 0 & \text{ketika} \quad \psi \quad \text{bukan karakter utama (principal),} \end{cases} \tag{1.9}$$

dan

$$\sum_{\psi\in Hom_\mathbb{Z}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})} e^{2\pi i\psi(g)} = \begin{cases} |G| & \text{ketika} \quad g = 0 \\ 0 & \text{ketika} \quad g \neq 0. \end{cases} \tag{1.10}$$

Diasumsikan grup Abel hingga G adalah grup aditif, sehingga elemen identitas di grup G adalah elemen 0. Kemudian himpunan semua karakter aditif dari G yang dinotasikan dengan $Hom_\mathbb{Z}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ membentuk suatu grup terhadap jumlahan fungsi dengan elemen identitas di $Hom_\mathbb{Z}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ adalah karakter aditif utama (*principal*), yaitu $\psi_0(g) = 0 + \mathbb{Z}$ untuk setiap $g \in G$.

2 HASIL PENELITIAN

Definisi dan proposisi mengenai kode dual dari suatu kode aditif dalam bentuk fungsi *annihilator* dapat dilihat di Wood [4], sedangkan definisi dan proposisi kode dual dari suatu kode aditif dalam bentuk subgrup merupakan gabungan konsep bentuk biaditif oleh Wood [4] dan konsep hasil kali dalam di dalam grup oleh Delsarte [1].

Definisi 2.1. *Misalkan C adalah suatu kode aditif panjang n atas grup Abel hingga G. Kode dual dari C didefinisikan sebagai himpunan*

$$(Hom_\mathbb{Z}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})^n : C) = \{\psi \in Hom_\mathbb{Z}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})^n \quad | \quad \psi(\boldsymbol{c}) = 0 + \mathbb{Z}, \quad \forall \boldsymbol{c} \in C\}.$$

Proposisi 2.2. *Misalkan C adalah suatu kode aditif panjang n atas suatu grup Abel hingga G. Kode dual dari C, yaitu $(Hom_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^n : C)$, memenuhi sifat-sifat:*

(i). $(Hom_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^n : C)$ merupakan kode aditif panjang n atas grup G,

(ii). $(G^n : (Hom_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^n : C))$=$C$, dan

(iii). $|C| \cdot |(Hom_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^n : C)| = |G^n|$.

Bukti. (i). Diambil sebarang $\psi_1, \psi_2 \in (Hom_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^n : C_1)$. Berarti $\psi_1(c) = 0+\mathbb{Z}$ dan $\psi_2(c) = 0+\mathbb{Z}$. Diperhatikan karena ψ_2 di $Hom_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^n$, maka $-\psi_2$ juga di $Hom_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^n$. Akibatnya diperoleh $(\psi_1 - \psi_2)(c) = \psi_1(c) - \psi_2(c) = 0+\mathbb{Z} - 0+\mathbb{Z} = 0+\mathbb{Z}$. Jadi $(Hom_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^n : C_1)$ adalah subgrup dari $Hom_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^n$. Dengan kata lain, $(Hom_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^n : C_1)$ adalah kode aditif panjang n atas grup Abel hingga G.

(ii). Diperhatikan bahwa $(G^n : ((Hom_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^n : C_1)) = \{y \in G^n | \psi(y) = 0+\mathbb{Z}, \forall \psi \in ((Hom_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^n : C_1)\}$. Akan ditunjukkan bahwa berlaku $(G^n : ((Hom_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^n : C_1))$=$C_1$.
Pertama, diambil sebarang y di $(G^n : ((Hom_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^n : C_1))$, maka y berada di G^n dengan sifat $\psi(y) = 0+\mathbb{Z}$, untuk setiap $\psi \in ((Hom_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^n : C_1)$. Akibatnya diperoleh $y \in C_1$.
Kedua, diambil sebarang $x \in C_1$ dan $\psi \in ((Hom_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^n : C_1)$, maka $\psi(x) = 0+\mathbb{Z}$. Akibatnya diperoleh $x \in (G^n : ((Hom_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^n : C_1))$.
Jadi $(G^n : ((Hom_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^n : C_1))$=$C_1$.

(iii). Pertama, akan ditunjukkan $(Hom_{\mathbb{Z}}(G^n,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) : C_1) \cong Hom_{\mathbb{Z}}(G^n/C_1,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Diperhatikan bahwa C_1 adalah suatu subgrup dari grup G^n, sehingga pemetaan $\psi : G^n \to G^n/C_1$ adalah suatu homomorfisma natural. Jika χ adalah homomorfisma grup $G^n/C_1 \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, yaitu $\chi \in Hom_{\mathbb{Z}}(G^n/C_1,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, maka $\chi \circ \psi$ adalah suatu homomorfisma grup dari G^n ke $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ yaitu $\chi \circ \psi$ termuat di $Hom_{\mathbb{Z}}(G^n,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Kemudian pengaitan $\chi \mapsto \chi \circ \psi$ mendefinisikan homomorfisma grup injektif $Hom_{\mathbb{Z}}(G^n/C_1,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to Hom_{\mathbb{Z}}(G^n,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ yang hasil pemetaannya adalah himpunan

$$(Hom_{\mathbb{Z}}(G^n,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) : C_1) = \{\rho \in Hom_{\mathbb{Z}}(G^n,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) | C_1 \subset Ker(\rho)\}.$$

Akibatnya, $(Hom_{\mathbb{Z}}(G^n,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) : C_1) \cong Hom_{\mathbb{Z}}(G^n/C_1,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Selanjutnya, berdasarkan Persamaan (1.4) dan (1.6), diperoleh $Hom_{\mathbb{Z}}(G^n/C_1,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong G^n/C_1$ dan $Hom_{\mathbb{Z}}(G^n,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong Hom_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^n$. Akibatnya, berlaku

$$|C_1| \cdot |(Hom_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^n : C_1)| = |G^n|. \qquad \square$$

Diberikan grup Abel hingga G^n. Didefinisikan hasil kali dalam di dalam G^n sebagai $\langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle = \psi_{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$, dengan definisi ψ_u adalah seperti pada Persamaan (1.1) untuk $|G|$ adalah genap dan seperti Persamaan (1.2) untuk $|G|$ adalah ganjil.

Kemudian misalkan H adalah subgrup dari G^n, dual dari H didefinisikan sebagai himpunan

$$H^{\perp} = \{\mathbf{x} \in G^n | \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = \psi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = 0 + \mathbb{Z}, \forall \mathbf{y} \in H\}.$$

Kode dual yang didefinisikan tersebut harus memenuhi proposisi yang ada pada Wood (2009), sehingga diperoleh proposisi sebagai berikut.

Proposisi 2.3. *Misalkan C_1 adalah kode aditif panjang n atas suatu grup Abel hingga G. Kode dual dari C_1, yaitu himpunan $C_1^{\perp} = \{\boldsymbol{x} \in G^n | \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x} \rangle = 0 + \mathbb{Z}, \forall \boldsymbol{u} \in C_1\}$, memenuhi:*

(i). $C_1^{\perp}$ *merupakan kode aditif panjang n atas grup Abel hingga G,*

(ii). $(C_1^{\perp})^{\perp} = C_1$, *dan*

(iii). $|C_1| \cdot |C_1^{\perp}| = |G^n|$

Bukti. (i). Diambil sebarang x dan y di $C_1^{\perp}$. Diperoleh bahwa $\langle u, x \rangle = \psi_u(x) = 0 + \mathbb{Z}$ dan $\langle u, y \rangle = \psi_u(y) = 0 + \mathbb{Z}$, untuk semua $u \in C_1$. Diperhatikan karena $y \in G^n$ dan G adalah grup aditif, maka $-y \in G^n$. Akibatnya berlaku, $\langle u, x - y \rangle = \psi_u(x + (-y)) = \psi_u(x) + \psi_u(-y) = \langle u, x \rangle - \langle u, y \rangle = 0 + \mathbb{Z}$. Diperoleh $C_1^{\perp}$ adalah subgrup dari G^n. Jadi, $C_1^{\perp}$ adalah kode aditif panjang n atas grup Abel hingga G.

(ii). Mengingat bahwa $C_1^{\perp} = \{x \in G^n | \langle u, x \rangle = 0 + \mathbb{Z}, \forall u \in C_1\}$, maka $(C_1^{\perp})^{\perp} = \{y \in G^n | \langle u, y \rangle = 0 + \mathbb{Z}, \forall u \in C_1^{\perp}\}$. Pertama, diambil sebarang $y \in (C_1^{\perp})^{\perp}$, diperoleh $\langle u, y \rangle = 0 + \mathbb{Z}$, untuk setiap $u \in C_1^{\perp}$. Mengingat $u \in C_1^{\perp}$ dan $y \in (C_1^{\perp})^{\perp}$ sebarang, maka $y \in C_1$. Selanjutnya, diambil sebarang $y \in C_1$ dan $u \in C_1^{\perp}$. Diperoleh $\langle u, x \rangle = 0 + \mathbb{Z}$ yang berarti $y \in (C_1^{\perp})^{\perp}$. Jadi $(C_1^{\perp})^{\perp} = C_1$.

(iii). Diperhatikan bahwa kode dual $C_1^{\perp}$ merupakan *annihilator* dari C_1 di dalam grup Abel hingga G^n yang dinotasikan $(G^n : C_1)$. Dalam pembuktian Proposisi 2.2 poin 3, telah dibuktikan bahwa $(Hom_{\mathbb{Z}}(G^n, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) : C_1)$ isomorfik dengan $Hom_{\mathbb{Z}}(G^n/C_1, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Kemudian karena $Hom_{\mathbb{Z}}(G^n, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ isomorfik dengan G^n dan $Hom_{\mathbb{Z}}(G^n/C_1, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong G^n/C_1$, diperoleh $(G^n : C_1) \cong G^n/C_1$. Akibatnya, diperoleh $|C_1| \cdot |C_1^{\perp}| = |G^n|$. □

Definisi 2.4. [Wood, 2009] *Misalkan G adalah suatu grup Abel berhingga and V adalah suatu ruang vektor atas bilangan kompleks $\mathbb{C}$. Himpunan semua fungsi dari grup G ke ruang vektor V yang dinotasikan dengan $F(G, V)$ merupakan suatu ruang vektor atas lapangan $\mathbb{C}$ dengan operasi jumlahan fungsu and perkalian skalar dengan fungsi.*

Definisi 2.5. [Wood, 2009] *Misalkan G adalah suatu grup Abel hingga, himpunan $Hom_{\mathbb{Z}}(G, \mathbb{C}^{\times})$ adalah grup karakter dari G, dan V adalah suatu ruang vektor atas bilangan kompleks $\mathbb{C}$. Himpunan semua fungsi dari grup $Hom_{\mathbb{Z}}(G, \mathbb{C}^{\times})$ ke ruang vektor V yang dinotasikan dengan $F(Hom_{\mathbb{Z}}(G, \mathbb{C}^{\times}), V)$ merupakan suatu* *ruang vektor atas lapangan $\mathbb{C}$ dengan operasi jumlahan fungsi dan perkalian skalar dengan fungsi.*

Definisi 2.6. [Rio, 2017] *Diberikan ruang vektor $F(G,V)$ dan $F(Hom_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}),V)$. Jika f adalah suatu elemen di F(G,V) dan ψ adalah suatu elemen di $Hom_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, maka transformasi Fourier dari f yang dinotasikan dengan $\widehat{f}$ adalah suatu pemetaan dari F(G,V) ke $F(Hom_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}),V)$ dengan definition sebagai berikut*

$$\widehat{f}(\psi) = \sum_{x\in G} e^{2\pi i\psi(x)} f(x)$$

Proposisi 2.7. [Rio, 2017] *Diberikan ruang vektor $F(G,V)$ dan $F(Hom_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}),V)$. Jika f adalah suatu fungsi di dalam ruang vektor $F(G,V)$, homomorfisma ψ adalah suatu karakter di dalam grup karakter $Hom_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, dan $\widehat{f}$ adalah transformasi Fourier dari f dengan definisi*

$$\widehat{f}(\psi) = \sum_{g\in G} e^{2\pi i\psi(g)} f(g),$$

maka rumus inversi Fourier didefinisikan sebagai

$$f(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{\psi\in Hom_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})} e^{2\pi i\psi(-g)} \widehat{f}(\psi).$$

Bukti. Mengingat $\widehat{f}(\psi) = \sum_{g\in G} e^{2\pi i\psi(g)} f(g)$, maka diperoleh

$$\begin{aligned}\sum_{\psi\in Hom_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})} e^{2\pi i\psi(-g)} \widehat{f}(\psi) &= \sum_{\psi\in Hom_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})} e^{2\pi i\psi(-g)} \sum_{b\in G} e^{2\pi i\psi(b)} f(b)\\ &= \sum_{b\in G}\Big(\sum_{\psi\in Hom_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})} \psi(b-g)\Big) f(b).\end{aligned}$$

Berdasarkan Persamaan (1.10), untuk $b = g$ yang berarti $b - g = 0$, diperoleh

$$\Big(\sum_{\psi\in Hom_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})} e^{2\pi i\psi(b-g)}\Big) f(g) = |G| \cdot f(g).$$

Untuk $b \neq g$, diperoleh

$$\sum_{b\in G/\{g\}}\Big(\sum_{\psi\in Hom_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})} e^{2\pi i\psi(b-g)}\Big) f(b) = 0.$$

Jadi,

$$\sum_{\psi\in Hom_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})} e^{2\pi i\psi(-g)} \widehat{f}(\psi) = \sum_{b\in G}\Big(\sum_{\psi\in Hom_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})} e^{2\pi i\psi(b-g)}\Big) f(b) = |G| \cdot f(g).$$

Terbukti bahwa

$$f(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{\psi\in Hom_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})} e^{2\pi i\psi(-g)} \widehat{f}(\psi).$$

□

Teorema 2.8. [Rio, 2017] *Misalkan H adalah subgrup dari suatu grup Abel berhingga G, f adalah suatu pemetaan dari G ke $\mathbb{C}$, $Hom_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ adalah grup karakter aditif dari grup G, dan himpunan*

$$(Hom_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}):H)=\{\psi\in Hom_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\quad|\quad \psi(h)=0+\mathbb{Z},\quad \forall h\in H\}$$

adalah annihilator dari H di dalam $Hom_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, berlaku

$$\sum_{x\in H} f(a+x)=\frac{1}{(Hom_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}):H)}\sum_{\psi\in(Hom_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}):H)} e^{2\pi i\psi(-a)}\widehat{f}(\psi)$$

Bukti. Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\sum_{x\in H} f(a+x)&=\sum_{x\in H}\frac{1}{|G|}\sum_{\psi\in Hom_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})} e^{2\pi i\psi(-a-x)}\widehat{f}(\psi)\\&=\sum_{x\in H}\frac{1}{|G|}\sum_{\psi\in Hom_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})} e^{2\pi i(\psi(-a)+\psi(-x))}\widehat{f}(\psi)\\&=\frac{1}{|G|}\sum_{x\in H}\sum_{\psi\in Hom_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})} e^{2\pi i\psi(-a)}e^{2\pi i\psi(-x)}\widehat{f}(\psi)\\&=\frac{1}{|G|}\sum_{\psi\in Hom_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})}\sum_{x\in H} e^{2\pi i\psi(-a)}e^{2\pi i\psi(-x)}\widehat{f}(\psi)\\&=\frac{1}{|G|}\sum_{\psi\in Hom_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})}\Big(e^{2\pi i\psi(-a)}\widehat{f}(\psi)\sum_{x\in H} e^{2\pi i\psi(-x)}\Big).\end{aligned}$$

Mengingat $Hom_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\cong G$ dan berdasarkan Teorema Lagrange, diperoleh $|(Hom_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}):H)|=|G:H|=\dfrac{|G|}{|H|}$. Kemudian berdasarkan Persamaan (1.9), diperoleh

$$\begin{aligned}\sum_{x\in H} f(a+x)&=\frac{1}{|G|}\sum_{\psi\in Hom_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})}\Big(e^{2\pi i\psi(-a)}\widehat{f}(\psi)\sum_{x\in H} e^{2\pi i\psi(-x)}\Big)\\&=\frac{1}{|(Hom_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}):H)|}\sum_{\psi\in Hom_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})} e^{2\pi i\psi(-a)}\widehat{f}(\psi).\end{aligned}$$

□

Akibat 2.9. [Rio, 2017] *Misalkan H adalah subgrup dari suatu grup Abel hingga G, f adalah suatu pemetaan dari G ke $\mathbb{C}$, himpunan $Hom_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ adalah grup karakter aditif dari grup G, serta himpunan karakter aditif*

$$(Hom_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}):H)=\{\psi\in Hom_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\quad|\quad \psi(h)=0+\mathbb{Z},\forall h\in H\}$$

adalah annihilator dari H di dalam $Hom_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Jika $a=0$ ($a\in H$), maka

$$\sum_{x\in H} f(x)=\frac{1}{|(Hom_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}):H)|}\sum_{\psi\in(Hom_{\mathbb{Z}}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}):H)}\widehat{f}(\psi)$$

Proposisi 2.10. [Wood, 2009] *Misalkan V adalah suatu aljabar kompleks dan f adalah suatu fungsi di dalam ruang vektor $F(G^n, V)$. Jika fungsi f didefinisikan dengan $f(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i)$ di mana $f_1, \cdots, f_n \in F(G, V)$, maka*

$$\widehat{f} = \prod_{i=1}^{n} \widehat{f}_i$$

yaitu untuk $\psi = (\psi_1, \cdots, \psi_n) \in Hom_{\mathbb{Z}}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})^n$ berlaku

$$\widehat{f}(\psi) = \prod_{i=1}^{n} \widehat{f}_i(\psi_i).$$

Mengingat bahwa $Hom_{\mathbb{Z}}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})^n \cong Hom_{\mathbb{Z}}(G^n, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, maka ψ dapat dipandang sebagai elemen di dalam $Hom_{\mathbb{Z}}(G^n, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

Bukti. Diperhatikan

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\psi) &= \widehat{f}(\psi_1, \cdots, \psi_n) \\
&= \sum_{(a_1, \cdots, a_n) \in G^n} f(a_1, \cdots, a_n) e^{2\pi i (\psi_1, \cdots, \psi_n)(a_1, \cdots, a_n)} \\
&= \sum_{(a_1, \cdots, a_n) \in G^n} f(a_1, \cdots, a_n) e^{2\pi i (\psi_1(a_1) + \cdots, \psi_n(a_n))} \\
&= \sum_{(a_1, \cdots, a_n) \in G^n} \prod_{i=1}^{n} f_i(a_i) e^{2\pi i \psi_i(a_i)}.
\end{aligned}$$

Misalkan $|G| = m$, maka $|G^n| = m^n$. Akibatnya diperoleh

$$\begin{aligned}
\sum_{(a_1, \cdots, a_n) \in G^n} \prod_{i=1}^{n} e^{2\pi i \psi_i(a_i)} f_i(a_i) &= \sum_{(a_1, \cdots, a_n) \in G^n} e^{2\pi i \psi_1(a_1)} f_1(a_1) \cdots e^{2\pi i \psi_n(a_n)} f_n(a_n) \\
&= e^{2\pi i \psi_1(a_{11})} f_1(a_{11}) \cdots e^{2\pi i \psi_n(a_{n1})} f_n(a_{n1}) \\
&+ e^{2\pi i \psi_1(a_{12})} f_1(a_{12}) \cdots e^{2\pi i \psi_n(a_{n2})} f_n(a_{n2}) \\
&\quad \vdots \\
&+ e^{2\pi i \psi_1(a_{1m})} f_1(a_{1m}) \cdots e^{2\pi i \psi_n(a_{nm})} f_n(a_{nm}) \\
&= \prod_{i=1}^{n} e^{2\pi i \psi_i(a_{i1})} f_i(a_{i1}) + \cdots + \prod_{i=1}^{n} e^{2\pi i \psi_i(a_{im})} f_i(a_{im}) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \left(e^{2\pi i \psi_i(a_{i1})} f_i(a_{i1}) + \cdots + e^{2\pi i \psi_i(a_{im})} f_i(a_{im}) \right) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \sum_{a_i \in G} e^{2\pi i \psi_i(a_i)} f_i(a_i) = \prod_{i=1}^{n} \widehat{f}(\psi_i).
\end{aligned}$$

□

Definisi 2.11. [Szabo and Wood, 2016] *Diberikan suatu grup Abel hingga G. Bobot Hamming dari suatu karakter di dalam $\widehat{G}$ didefinisikan sebagai.*

$$wt(\psi) = \begin{cases} 0, & \textit{ketika} \quad \psi \quad \textit{adalah karakter principal} \\ 1, & \textit{when} \quad \psi \quad \textit{bukan karakter principal.} \end{cases} \tag{2.1}$$

Untuk $\psi = (\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n) \in \widehat{G}^n$, didefinisikan

$$wt(\psi) = \sum_{i=1}^{n} wt(\psi_i).$$

Definisi ini juga berlaku untuk karakter aditif dan grup karakter aditif dari suatu grup Abel hingga.

Teorema 2.12. [Wood, 2009] *Diberikan kode aditif C subruang dari grup Abel hingga G^n dan annihilator $(Hom_{\mathbb{Z}}(G^n, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) : C)$ adalah kode dualnya. Jika $W_C(X, Y)$ adalah pencacah bobot homogen dari C dan $W_{(Hom_{\mathbb{Z}}(G^n,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}):C)}(X, Y)$ adalah pencacah bobot homogen dari $(Hom_{\mathbb{Z}}(G^n, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) : C)$, maka*

$$W_{(Hom_{\mathbb{Z}}(G^n,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}):C)}(X, Y) = \frac{1}{|C|} W_C(X + (|G| - 1)Y, X - Y).$$

Bukti. Diperhatikan polinomial $\mathbb{C}[X, Y]$. Didefinisikan pemetaan $h : G \to \mathbb{C}[X, Y]$ dengan definisi $h(a) = X^{1-wt(a)}Y^{wt(a)}$, untuk setiap $a \in G$. Kemudian untuk setiap karakter $\psi \in Hom_{\mathbb{Z}}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, diperoleh

$$\widehat{h}(\psi) = \sum_{a \in G} e^{2\pi i \psi(a)} h(a) = \sum_{a \in G} e^{2\pi i \psi(a)} X^{1-wt(a)} Y^{wt(a)} = X + Y \sum_{a \in G/\{0\}} e^{2\pi i \psi(a)}$$

Berdasarkan Persamaan (1.9), diperoleh

$$\widehat{h}(\psi) = \begin{cases} X + (|G| - 1)Y, & \text{ketika} \quad \psi \quad \text{adalah karakter } \textit{principal} \\ X - Y, & \text{ketika} \quad \psi \quad \text{bukan karakter } \textit{principal} \end{cases} \tag{2.2}$$

Kemudian misal f adalah pemetaan $G^n \to \mathbb{C}[X, Y]$ dengan definisi

$$f(a_1, \cdots, a_n) = \prod_{i=1}^{n} f_i(a_i) = \prod_{i=1}^{n} X^{1-wt(a_i)} Y^{wt(a_i)} = X^{n-wt(a)} Y^{wt(a)}$$

untuk semua $(a_i, \cdots, a_n)$ di G^n.
Kemudian berdasarkan Proposisi 2.10 dan Persamaan (2.1), diperoleh

$$\widehat{f}(\psi) = \prod_{i=1}^{n} \widehat{f}_i(\psi_i) = \Big(X + (|G| - 1)Y\Big)^{n-wt(\psi_i)} \Big(X - Y\Big)^{wt(\psi_i)}. \tag{2.3}$$

Berdasarkan rumus jumlahan Poisson dan Persamaan (2.1), diperoleh

$$W_C(X,Y) = \sum_{x\in C} f(x) = \frac{1}{|(Hom_{\mathbb{Z}}(G^n,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}):C)|} \sum_{\psi\in(Hom_{\mathbb{Z}}(G^n,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}):C)} \widehat{f}(\psi)$$
$$= \frac{1}{|(Hom_{\mathbb{Z}}(G^n,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}):C)|} \sum_{\psi\in(Hom_{\mathbb{Z}}(G^n,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}):C)} \Big(X+(|G|-1)Y\Big)^{n-wt(\psi)}\Big(X-Y\Big)^{wt(\psi)}.$$

Kemudian, mengingat $(Hom_{\mathbb{Z}}(G^n,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}):C)$ dengan C saling dual, maka diperoleh

$$W_{(Hom_{\mathbb{Z}}(G^n,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}):C)}(X,Y) = \frac{1}{|C|}W_C(X+(|G|-1)Y, X-Y).$$

□

Teorema 2.13. [Identitas MacWilliams] *Diberikan kode aditif C yaitu subgrup dari grup Abel hingga G^n dan $C^{\perp} = \{x \in G^n | \langle u,x\rangle = \psi_u(x) = 0+\mathbb{Z}, \forall u \in C\}$ adalah kode dualnya. Jika $W_C(X,Y)$ adalah pencacah bobot homogen dari C dan $W_{C^{\perp}}(X,Y)$ adalah pencacah bobot homogen dari $C^{\perp}$, maka*

$$W_{C^{\perp}}(X,Y) = \frac{1}{|C|}W_C(X+(|G|-1)Y, X-Y).$$

Bukti. Diperhatikan ring polinomial $\mathbb{C}[X,Y]$. Didefinisikan pemetaan $f : G^n \to \mathbb{C}[X,Y]$ dengan definisi

$$f(a) = X^{n-wt(a)}Y^{wt(a)}.$$

Diperoleh persamaan

$$\sum_{a\in C^{\perp}} f(a) = \sum_{a\in C^{\perp}} X^{n-wt(a)}Y^{wt(a)} = W_{C^{\perp}}(X,Y).$$

Transformasi Fourier dari f menjadi seperti berikut.

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\psi_u) &= \sum_{a\in G^n} e^{2\pi i\psi_u(a)} f(a), \quad \text{untuk suatu u di C}\\
&= \sum_{a\in G^n} e^{2\pi i\psi_u(a)} X^{n-wt(a)}Y^{wt(a)}\\
&= \sum_{a_1,\cdots,a_n\in G^n} e^{2\pi i\psi_{u_1,\cdots,u_n}(a_1,\cdots,a_n)} X^{n-wt(a_1)-\cdots-wt(a_n)}Y^{wt(a_1)+\cdots+wt(a_n)}\\
&= \sum_{a_1,\cdots,a_n\in G^n} e^{2\pi i\psi_{u_1}(a_1)}\cdots e^{2\pi i\psi_{u_n}(a_n)} X^n\Big(\frac{Y}{X}\Big)^{wt(a_1)+\cdots+wt(a_n)}\\
&= X^n \sum_{a_1,\cdots,a_n\in G^n} \Big(e^{2\pi i\psi_{u_1}(a_1)}\cdots e^{2\pi i\psi_{u_n}(a_n)}\Big)\Big(\Big(\frac{Y}{X}\Big)^{wt(a_1)}\cdots\Big(\frac{Y}{X}\Big)^{wt(a_n)}\Big).
\end{aligned}$$

Misal $|G| = m$, maka

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\psi_u) &= X^n\Big(\Big(e^{2\pi i\psi_{u_1}(a_{11})}\cdots e^{2\pi i\psi_{u_n}(a_{n1})}\Big)\Big(\Big(\frac{Y}{X}\Big)^{wt(a_{11})}\cdots\Big(\frac{Y}{X}\Big)^{wt(a_{n1})}\Big)\\
&+ \cdots\\
&+ \Big(e^{2\pi i\psi_{u_1}(a_{1m})}\cdots e^{2\pi i\psi_{u_n}(a_{nm})}\Big)\Big(\Big(\frac{Y}{X}\Big)^{wt(a_{1m})}\cdots\Big(\frac{Y}{X}\Big)^{wt(a_{nm})}\Big)\Big)\\
&= X^n\Big(\prod_{i=1}^{n} e^{2\pi i\psi_{u_i}(a_{i1})}\Big(\frac{Y}{X}\Big)^{wt(a_{i1})} + \cdots + \prod_{i=1}^{n} e^{2\pi i\psi_{u_i}(a_{im})}\Big(\frac{Y}{X}\Big)^{wt(a_{im})}\Big)\\
&= X^n\Big(\prod_{i=1}^{n}\Big(e^{2\pi i\psi_{u_i}(a_{i1})}\Big(\frac{Y}{X}\Big)^{wt(a_{i1})} + \cdots e^{2\pi i\psi_{u_i}(a_{im})}\Big(\frac{Y}{X}\Big)^{wt(a_{im})}\Big)\Big)\\
&= X^n\prod_{i=1}^{n}\sum_{a_i\in G} e^{2\pi i\psi_{u_i}(a_i)}\Big(\frac{Y}{X}\Big)^{wt(a_i)}.
\end{aligned}$$

Jika $u_i = 0$, maka

$$\begin{aligned}
X^n\prod_{i=1}^{n}\sum_{a_i\in G} e^{2\pi i\psi_{u_i}(a_i)}\Big(\frac{Y}{X}\Big)^{wt(a_i)} &= X^n\prod_{i=1}^{n} e^{2\pi i\psi_0(0)}\Big(\frac{Y}{X}\Big)^{0} + X^n\prod_{i=1}^{n}\sum_{a_i\in G/\{0\}}\\
&\quad e^{2\pi i\psi_0(a_i)}\Big(\frac{Y}{X}\Big)^{wt(a_i)}\\
&= X^n\prod_{i=1}^{n}\Big(1 + (|G|-1)\Big(\frac{Y}{X}\Big)\Big).
\end{aligned}$$

Dari Persamaan (1.9), ketika π bukan merupakan karakter *principal* dipunyai $\sum_{a_i\in G} e^{2\pi i\psi_{u_i}(a_i)} = 0$ dan $e^{2\pi i\psi_{u_i}(0)} = 1$.
Dipecah untuk kasus $u_i = 0$ dan $u_i \neq 0$, diperoleh

$$\sum_{a_i\in G} e^{2\pi i\psi_{u_i}(a_i)} = e^{2\pi i\psi_{u_i}(0)} + \sum_{a_i\in G/\{0\}} e^{2\pi i\psi_{u_i}(a_i)} \iff 0 = 1 + \sum_{a_i\in G/\{0\}} e^{2\pi i\psi_{u_i}(a_i)}.$$

Diperoleh $\sum_{a_i\in G/\{0\}} e^{2\pi i\psi_{u_i}(a_i)} = -1$.

Akibatnya jika $u_i \neq 0$, maka

$$\begin{aligned}
X^n\prod_{i=1}^{n}\sum_{a_i\in G} e^{2\pi i\psi_{u_i}(a_i)}\Big(\frac{Y}{X}\Big)^{wt(a_i)} &= X^n\prod_{i=1}^{n}\Big(e^{2\pi i\psi_{u_i}(0)}\Big(\frac{Y}{X}\Big)^{0} + X^n\prod_{i=1}^{n}\sum_{a_i\in G/\{0\}}\\
&\quad e^{2\pi i\psi_{u_i}(a_i)}\Big(\frac{Y}{X}\Big)^{wt(a_i)} = X^n\prod_{i=1}^{n}\Big(1 - \frac{Y}{X}\Big)
\end{aligned}$$

Diperoleh persamaan

$$\widehat{f}(\psi_u) = \Big(X + (|G|-1)Y\Big)^{n-wt(\psi_u)}\Big(X - Y\Big)^{wt(\psi_u)} \tag{2.4}$$

Diperhatikan bentuk dual berikut

$$C^{\perp} = \{x \in G^n | \psi_u(x) = 0 + \mathbb{Z}, \forall u \in C\}.$$

Dapat dikatakan bahwa ψ_u adalah pengenol dari $C^{\perp}$ di dalam grup karakter $Hom_{\mathbb{Z}}(G^n, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, yaitu $\psi_u \in (Hom_{\mathbb{Z}}(G^n, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) : C^{\perp})$.

Kemudian mengingat $|(Hom_{\mathbb{Z}}(G^n, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) : C)| = |C^{\perp}|$ dan antara $C^{\perp}$ dengan C saling dual, maka $|(Hom_{\mathbb{Z}}(G^n, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) : C^{\perp})| = |C|$.

Selanjutnya berdasarkan rumus jumlahan Poisson, Persamaan (2.2), dan bahwa $|(Hom_{\mathbb{Z}}(G^n, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) : C^{\perp})| = |C|$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} W_{C^{\perp}}(X,Y) = \sum_{a \in C^{\perp}} f(a) &= \frac{1}{|(\widehat{G} : C^{\perp})} \sum_{\psi_u \in (Hom_{\mathbb{Z}}(G^n, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) : C^{\perp})} \widehat{f}(\psi_u) \\ &= \frac{1}{|(Hom_{\mathbb{Z}}(G^n, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) : C^{\perp})} \sum_{\psi_u \in (Hom_{\mathbb{Z}}(G^n, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) : C^{\perp})} \\ &\quad \Big(X + (|G|-1)Y\Big)^{n-wt(\psi_u)} \Big(X - Y\Big)^{wt(\psi_u)} \\ &= \frac{1}{|C|} \sum_{v \in C} \Big(X + (|G|-1)Y\Big)^{n-wt(v)} \Big(X - Y\Big)^{wt(v)} \\ &= \frac{1}{|C|} W_C(X + (|G|-1)Y, X - Y). \end{aligned}$$

□

3 PENUTUP

Berdasarkan hasil penelitian, diperoleh kesimpulan-kesimpulan sebagai berikut.

(i). Pendefinisian kode dual dari suatu kode aditif dapat menggunakan konsep fungsi *annihilator* pada teori grup sebagai berikut. Diberikan grup Abel hingga G dan himpunan G^n adalah n-tupel dari grup G. Wood [4] mendefinisikan kode dual dari kode aditif C_1 yaitu subgrup dari grup Abel hingga G^n sebagai himpunan

$$\{\psi \in Hom_{\mathbb{Z}}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})^n \quad | \quad \psi(c) = 0 + \mathbb{Z}, \quad \forall c \in C_1\}.$$

Kode dual ini merupakan fungsi *annihilator* dari C_1 di dalam $Hom_{\mathbb{Z}}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})^n$ yang dinotasikan dengan $(Hom_{\mathbb{Z}}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})^n : C_1)$.

(ii). Pendefinisian kode dual dari suatu kode aditif dapat menggunakan konsep subgrup dengan menggabungkan konsep bentuk biaditif pada Wood [4] dan Delsarte [1]. Diperoleh pendefinisian kode dual dari suatu kode aditif sebagai berikut. Diberikan grup Abel hingga G dan himpunan G^n adalah n-tupel dari grup G. Didefinisikan hasil kali dalam di dalam G^n sebagai pemetaan dari $G^n \times G^n$ ke $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ dengan $\langle u, x \rangle = \psi_u(x)$ dengan ψ_u adalah karakter aditif dari grup G^n. Kemudian misalkan H adalah subgrup dari G^n, dual dari H didefinisikan sebagai himpunan

$$H^{\perp} = \{x \in G^n | \langle y, x \rangle = \psi_y(x) = 0 + \mathbb{Z}, \forall y \in H\}.$$

(iii). Untuk membuktikan teorema Identitas MacWilliams pada kode aditif, baik dengan kode dual berupa fungsi *annihilator* maupun subgrup, diperlukan konsep mengenai transformasi Fourier dan rumus jumlahan Poisson. Alur pembuktian teorema Identitas MacWilliams pada kode aditif sama dengan alur pembuktian teorema Identitas MacWilliams pada kode linear.

REFERENSI

[1] Delsarte, P., Bounds for Unrestricted Codes, by Linear Programming, Philips Res. Rep. 27 (1972), 272-289. MR MR0314545

[2] Rio, A. D., Codes Over Rings and Modules, `http://www.di.univr.it/dovumenti/Occorrenzalns/matdid/matdid553467.pdf`, diakses 25 Januari 2017

[3] Szabo, S. dan Wood, J. A., Properties of Dual Codes Defined by Nondegenerate Forms, *Jacodes Math.*

[4] Wood, J. A., Lecture Notes on Dual Codes and The MacWilliams Identities, *Amer. J Math.*

MIFTAH YULIATI
Universitas Gadjah Mada
miftah.yuliati@mail.ugm.ac.id

SRI WAHYUNI
Universitas Gadjah Mada
swahyuni@ugm.ac.id

INDAH EMILIA WIJAYANTI
Universitas Gadjah Mada
ind_wijayanti@ugm.ac.id