PENDUGAAN PERMUKAAN RESPONS KWADRATIS DENGAN 3^2 FAKTORIAL

Oleh

Nasrullah*)

SUMMARY

This paper deals with exploring response surfases of two x-variables using a complete factorial experiment which has the aim to discover the level at which each of these variables must be set in order to maximize the response and the net profit. In comparison to other designs, complete factorial experiments permit us to analyze additional observations which are of interest. Helping the beginners who are interested in this field is the main purpose of this paper. Hence, each step in the computation is given completely.

RINGKASAN

Karangan ini membicarakan pendugaan respons permukaan dua perubah bebas dengan menggunakan rancangan faktorial lengkap. Menduga permukaan respons bertujuan untuk mendapatkan kombinasi perlakuan sedemikian rupa sehingga diperoleh hasil dan keuntungan yang sebesar-besarnya. Dibandingkan dengan rencana lain, rancangan perlakuan faktorial lengkap memungkinkan kita untuk menganalisa hasil-hasil pengamatan tambahan yang dipandang perlu. Disini ditunjukkan setiap langkah dalam penghitungan, karena karangan ini bertujuan membantu mereka yang baru menerjunkan diri dalam bidang ini.

PENGANTAR

Di dalam bidang Pertanian, untuk melakukan berbagai macam percobaan sering dipakai rancangan faktorial. Jika semua faktor yang dicoba merupakan perubah bebas yang dapat dinyatakan kwantitasnya, seperti waktu, suhu, dosis pupuk dsb., nampak bahwa hasil responsnya merupakan fungsi dari faktor-faktor tsb. yang dapat ditulis sebagai

$$Y = f(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots x_n) \qquad (1)$$

Untuk bidang Pertanian, biasanya sudah memadai untuk menduga fungsi tsb sampai tingkat kwadratnya saja, sehingga untuk perubah bebas k=1 diperoleh fungsi

$$Y = b_o + b_1x_1 + b_{11}x_1^2 \qquad (2)$$

yang merupakan suatu kurva respons. Sedangkan untuk k=2 atau lebih akan diperoleh suatu permukaan respons.

*) Mahasiswa tingkat Sarjana merangkap mahasiswa pembantu Laboratorium Statistik Pertanian, Departemen Agronomi, Fakultas Pertanian, Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta, Indonesia.

Untuk k=2 bentuk permukaan responsnya secara umum dapat dihampiri oleh persamaan

$$Y = b_o + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{12}x_1x_2 \tag{3}$$

dimana b_o, b_1, b_2, b_{11}, b_{22} dan b_{12} merupakan nilai-nilai yang menentukan persamaan (3). Nilai ini harus kita tentukan berapa besarnya. Permukaan respons model demikian ini disebut respons kwadratik, karena sebanyak-banyaknya hanya mengandung suku berpangkat dua seperti x_1^2, x_2^2 dan x_1x_2.

Untuk mendapatkan permukaan respons kwadratik dari 2 faktor, seperti halnya untuk n faktor, maka sedikit-dikitnya diperlukan 3 taraf yang berbeda-beda dari masing-masing faktor, sehingga terdapat 9 kombinasi perlakuan. Dengan demikian dipakai rancangan 3^2 faktoral.

RANCANGAN 3^2 FAKTORIAL LENGKAP

Misalnya kita ingin mengetahui pengaruh pupuk N dan P terhadap produksi padi varietas baru. Di sini kita pilih 3 taraf untuk tiap macam pupuk, yaitu N_1, N_2 dan N_3, P_1, P_2 dan P_3. Untuk memperoleh permukaan respons yang baik, pemilihan taraf masing-masing faktor harus sedemikian rupa sehingga responsnya menampakkan hukum "Law of Deminishing Return".

Untuk tiap-tiap kombinasi perlakuan yang dicobakan akan memenuhi persamaan (3), sehingga

$$\begin{aligned}
Y_1 &= b_o + b_1N_1 + b_1P_1 + b_{11}N_1^2 + b_{22}P_1^2 + b_{12}N_1P_1 \\
Y_2 &= b_o + b_1N_2 + b_2P_1 + b_{11}N_2^2 + b_{22}P_1^2 + b_{12}N_2P_1 \\
&\;\;\vdots \\
Y_9 &= b_o + b_1N_3 + b_2P_3 + b_{11}N_3^2 + b_{22}P_3^2 + b_{12}N_3P_3
\end{aligned} \tag{4}$$

Persamaan (4) di atas secara matrix dapat ditulis sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ . \\ . \\ . \\ Y_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & N_1 & P_1 & N_1^2 & P_1^2 & N_1P_1 \\ 1 & N_2 & P_1 & N_2^2 & P_1^2 & N_2P_1 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & N_3 & P_3 & N_3^2 & P_3^2 & N_3P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_o \\ b_1 \\ b_2 \\ b_{11} \\ b_{22} \\ b_{12} \end{bmatrix}$$

atau

$$\underline{Y} = X\,\underline{b} \tag{5}$$

Berdasarkan pendugaan menurut cara jumlah kwadrat yang sekecil-kecilnya, nilai-nilai b didapat dari hubungan

$$X'X\,\underline{b} = X'\underline{Y}$$

Untuk mempermudah perhitungan, karena taraf-tarafnya merupakan deret hitung, langkah pertama yang harus dijalankan adalah mengganti dosiss pupuk dengan koeffisien polynomial orthogonal. Karena digunakan 3 taraf, maka diganti dengan -1, 0 dan +1, sehingga urutan pengolahan matrixnya adalah sbb.

$$X = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_o & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_2^2 & x_1x_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X'X = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 6 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya kita cari inverse dari $X'X = (X'X)^{-1}$ dengan mempergunakan adjoin. Oleh karena itu harus kita cari kofaktor dari tiap-tiap unsur dari matrix X'X yang nantinya akan didapat hasil sbb. :

$$K_{ij} = \begin{bmatrix} 6^2.4^2.5 & 0 & 0 & -6^3.4.2 & -6^3.4.2 & 0 \\ 0 & 6^3.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6^3.4 & 0 & 0 & 0 \\ -6^3.4.2 & 0 & 0 & 6^3.4.3 & 0 & 0 \\ -6^3.4.2 & 0 & 0 & 0 & 6^3.4.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6^4 \end{bmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} = \left[\frac{K_{ji}}{D}\right]$$

Oleh karena $K_{ij} = K_{ji}$ dan besarnya $D = 6^4.4$ maka persamaan di atas menjadi

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 5/9 & 0 & 0 & -1/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ -1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} Y1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \\ Y_6 \\ Y_7 \\ Y_8 \\ Y_9 \end{bmatrix}$$

Penggandaan akhir nilai-nilai Y_i (i=1, 2, ... 9) dalam bentuk vektor $\underline{Y}$ terhadap putaran matrix X^{-1} diperoleh

$$X'Y = \begin{bmatrix} Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5 + Y_6 + Y_7 + Y_8 + Y_9 \\ -Y_1 - Y_2 - Y_3 + Y_7 + Y_8 + Y_9 \\ -Y_1 + Y_3 - Y_4 + Y_6 - Y_7 + Y_9 \\ Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_7 + Y_8 + Y_9 \\ Y_1 + Y_3 + Y_4 + Y_6 + Y_7 + Y_9 \\ Y_1 - Y_3 - Y_7 + Y_9 \end{bmatrix}$$

Bentuk vektor di atas secara sederhana dapat dituliskan sbb. :

$$X'Y = \begin{bmatrix} 0Y \\ 1Y \\ 2Y \\ 11Y \\ 22Y \\ 12Y \end{bmatrix}$$

Persamaan (6) dapat diubah menjadi

$$\underline{b} = (X'X)^{-1}X'\underline{Y} \qquad (7)$$

Dengan menggunakan persamaan (7) ini diperoleh koeffisien-koeffisien regressi yang ingin kita ketahui yang secara sederhana dapat dituliskan

$$
\begin{aligned}
b_o &= 5/9\ (0Y) - 1/3\ \Sigma\ (iiY) \\
b_i &= 1/6\ (iY) \\
b_{ii} &= 1/2\ (iiY) - 1/3\ (0Y) \\
b_{ij} &= 1/4\ (ijY)
\end{aligned}
\qquad (8)
$$

Untuk menduga simpangan baku masing-masing nilai b, yaitu s_b^2 diperoleh dari hubungan

$$s_b^2 = s^2 (X'X)^{-1}$$

dimana s^2 adalah variance error percobaan, sehingga

$$
\begin{aligned}
s_{b_o} &= s\sqrt{5/9} \\
s_{b_i} &= s\sqrt{1/6} \\
s_{b_{ii}} &= s\sqrt{1/2} \\
s_{b_{ij}} &= s\sqrt{1/4}
\end{aligned}
$$

Bentuk persamaan permukaan respons yang diperoleh dengan memasukkan nilai-nilai b masih harus diubah menjadi bentuk aslinya dengan mengubah x_1 ke N dan x_2 ke P dengan mempergunakan persamaan di bawah ini

$$X_1 = \frac{N - (\text{dosis maximum} + \text{dosis minimum})/2}{(\text{dosis maximum} - \text{dosis minimum})/2}$$

$$X_2 = \frac{P - (\text{dosis maximum} + \text{dosis minimum})/2}{(\text{dosis maximum} - \text{dosis minimum})/2}$$

Penentuan dosis optimum dan dosis maximum

Dosis optimum dicapai bila keuntungan yang diperoleh telah sama dengan ongkos yang dikeluarkan. Atau dapat dirumuskan sebagai

$$p\ \Delta\ Y = q_1\ \Delta\ x_1$$
$$p\ \Delta\ Y = q_2\ \Delta\ x_2$$

dimana $\Delta\ Y$ = penambahan hasil produksi

$\Delta\ x_1$ = penambahan faktor x_1 yang diberikan

$\Delta\ x_2$ = penambahan faktor x_2 yang diberikan

p = harga produksi per satuan produksi

q_1 = harga faktor x_1 per satu satuan

q_2 = harga faktor x_2 per satu satuan

Persamaan di atas dapat diubah menjadi

$$\frac{dY}{dx_1} = \frac{q_1}{p} \quad \text{dan} \quad \frac{dY}{dx_2} = \frac{q_2}{p}$$

Untuk permukaan respons kwadratik dengan 2 perubah bebas dan digabungkan dengan persamaan di atas, maka

$$\frac{dY}{dx_1} = b_1 + 2b_{11}x_1 + b_{12}x_2 = \frac{q_1}{p}$$

$$\frac{dY}{dx_2} = b_2 + 2b_{22}x_2 + b_{12}x_1 = \frac{q_2}{p}$$

Penyelesaian kedua persamaan di atas akan menghasilkan

$$x_1 = \frac{2b_{22}(b_1 - \frac{q_1}{p}) - b_{12}(b_2 - \frac{q_2}{p})}{b_{12}^2 - 4b_{11}b_{22}}$$

$$x_2 = \frac{2b_{11}(b_2 - \frac{q_2}{p}) - b_{12}(b_1 - \frac{q_1}{p})}{b_{12}^2 - 4b_{11}b_{22}}$$

Sedangkan dosis maximum diperoleh bila

$$\frac{dY}{dx_1} = 0 \quad \text{dan} \quad \frac{dY}{dx_2} = 0$$

atau dengan perkataan lain

$$\frac{q_1}{p} = 0 \quad \text{dan} \quad \frac{q_2}{p} = 0$$

PERNYATAAN TERIMA KASIH

Pada kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya atas pemberian saran dan dorongan dari Ir. Soemartono, Ketua Laboratorium Statistik Pertanian, Departemen Agronomi, Fakultas Pertanian UGM. Penulis mengucapkan terima kasih pula kepada rekan sejawat atas bantuannya.

DAFTAR PUSTAKA

Anonim. 1971. Laporan Pengolahan Data Pengujian Pemupukan Padi Sawah. Bagian Biometrika Institut Pertanian Bogor. 25 p.

Cochran, W.G. and G.M. Cox. 1962. Experimental Designs. 2nd ed. John Wiley & Sons, Inc., New York. 611p.

Mattjik, A.A. 1971. Rancangan Oktagon untuk Pendugaan Permukaan Respons Kwadratik, Bull. Biometrika Bogor, 2. pp1 - 5.

Nasoetion, A.H. 1971. Rancangan Hexagon untuk Pendugaan Permukaan Respons Kwadratik. Bull. Biometrika Bogor, 1. 10p.

------------- 1972. Pemilihan Rancangan Perlakuan untuk Menduga Permukaan Respons. Tidak dipublikasikan.

Nasoetion, L.I. Rancangan Pentagon untuk Pendugaan Permukaan Respons Kwadratik. Bull. Biometrika Bogor, 3. 8p.

Soemartono, 1971. Pola Percobaan (Diktat Kuliah Penataran Purna Sarjana Penyuluhan Pertanian). Yayasan Pembina Fakultas Pertanian UGM, Yogyakarta, 106p.

Sukhatme, P.V. 1966. Statistics of Crop Responses to Fertilizers. Food and Agriculture Organization of the United Nations. Italy. 112p.