

## ARTIKEL RISET

# Perhitungan Numerik Efek Doppler dalam Ruang-Waktu Schwarzschild dengan Sumber dan Penerima yang Bergerak

Arief Hermanto

## Ringkasan

Efek Doppler adalah adanya perbedaan antara frekuensi yang ditangkap oleh penerima dengan yang dipancarkan sumber. Ini merupakan topik baku yang dibahas dalam buku-buku ajar. Dalam konteks Teori Relativitas Umum buku ajar selalu membatasi diri pada kasus khusus di mana baik sumber maupun penerima berada dalam keadaan diam. Dalam penelitian ini akan diselidiki kasus yang lebih umum yaitu kasus di mana baik sumber maupun penerima berada dalam keadaan bergerak. Karena gerak sumber dan penerima bisa sembarang maka tidak semuanya bisa dianalisis secara analitik; diperlukan perhitungan secara numerik. Dalam penelitian ini akan ditekankan perhitungan numerik secara konseptual sehingga dalam konteks ini akan digunakan Excel beserta VBA sebagai bahasa pemrograman yang dirasa paling tepat.

**Kata Kunci** : Relativitas Umum, efek doppler, numerik

## Abstract

Doppler effect is the existence of the difference between frequency captured by observer and radiated by the source. This is one of the standard topics discussed in textbooks. In the context of General Relativity the textbooks always restrict the discussion in special case in which the source and the observer are both at rest. In this research we investigate more general case in which both the source and observer are in arbitrary motion. Due to the general nature of the motions we cannot analyze the case by analitic means, we have to use numerical computation. In this research we give emphasis to conceptual understanding so that we will use Excel with VBA as the most appropriate programming language.

**Keywords:** General relativity; Doppler effect; numerical.

## PENDAHULUAN

Komputasi secara garis besar dapat dibagi menjadi 2 kelompok besar, yaitu komputasi numerik dan komputasi non-numerik. Komputasi numerik adalah komputasi dengan keluaran bilangan real. Penekanan pada bilangan real sangat penting karena inilah yang menyebabkan kesalahan pembulatan dan kesalahan pemotongan. Kedua jenis kesalahan itu menyebabkan komputasi numerik menjadi tidak mudah. Komputasi non-numerik adalah komputasi dengan keluaran bukan bilangan real. Komputasi yang hanya melibatkan bilangan bulat harus dimasukkan dalam kategori ini.

Kesulitan pada komputasi ini adalah kompleksitas algoritma yang kemudian berkaitan dengan durasi komputasi yang panjang dan memori komputer yang besar.

Komputasi non-numerik meliputi bidang yang sangat luas. Selain bilangan bulat, keluarannya yang lain bisa berupa simbol-simbol non-numerik (misalnya dalam bidang linguistik), atau ekspresi matematik (yang komputasinya terkenal dengan istilah komputasi simbolik) dan contoh lain adalah keluaran yang berupa diagram. Sebuah contoh yang sangat jelas adalah ketika kita menggunakan misalnya bahasa Matlab untuk menghasilkan sebuah gambar grafik. Karena gambar grafik adalah termasuk diagram, maka komputasinya itu boleh disebut sebagai komputasi diagramatik. Diagram yang dihasilkan komputasi diagramatik bisa berupa diagram yang statik; bisa pula berupa diagram yang mengandung kesan gerakan

Correspondence: [arief\\_hermanto@ugm.ac.id](mailto:arief_hermanto@ugm.ac.id)

Departemen Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Gadjah Mada, Sekip Utara Bulaksumur, Sinduadi, Mlati, Kota Yogyakarta, Daerah Istimewa Yogyakarta, Indonesia

Full list of author information is available at the end of the article

\*Equal contributor

(sering disebut sebagai animasi). Tentu saja diagram, baik yang statik maupun animasi menjadi sangat berguna dalam fisika, yaitu sebagai visualisasi dari hasil simulasi suatu gejala.

Dalam Fisika komputasi numerik merupakan perjalanan akhir dari penjabaran teoretik dari suatu gejala karena hasil berupa bilangan real itu akan dibandingkan dengan hasil pengukuran eksperimen. Jika bilangan hasil komputasi numerik cocok dengan bilangan hasil eksperimen maka teorinya dikuatkan (seringkali dikatakan teorinya dibuktikan benar). Konsep kebenaran yang seperti ini dan peranan komputasi numerik bisa mengarahkan kita pada konstruktivisme ((Mandelkern, 1985)[1],(Loef, 1984)[2],(Hellman, 1998)[3]).

Dalam penelitian ini akan digunakan komputasi atau perhitungan numerik untuk menyelesaikan suatu gejala yaitu Efek Doppler. Efek Doppler adalah adanya perbedaan antara frekuensi (bunyi untuk yang non-relativistik; cahaya untuk yang relativistik, baik khusus maupun umum) yang ditangkap oleh penerima dengan yang dipancarkan sumber. Ini merupakan topik baku yang dibahas dalam buku-buku ajar. Dalam konteks Teori Relativitas Umum buku ajar selalu membatasi diri pada kasus khusus di mana baik sumber maupun penerima berada dalam keadaan diam. Eksperimen yang berkaitan dengan ini merupakan salah satu dari beberapa eksperimen penting yang membuktikan kebenaran Teori Relativitas Umum. Dalam penelitian ini akan diselidiki kasus yang lebih umum yaitu kasus di mana baik sumber maupun penerima berada dalam keadaan bergerak. Karena gerak sumber dan penerima bisa sembarang maka tidak semuanya bisa dianalisis secara analitik; diperlukan perhitungan secara numerik. Dalam penelitian ini akan ditekankan perhitungan numerik secara konseptual sehingga dalam konteks ini akan digunakan Excel beserta VBA sebagai bahasa pemrograman yang dirasa paling tepat.

Keluaran dari penelitian ini adalah berupa *worksheet* dari Excel yang bisa digunakan untuk perhitungan numerik Efek Doppler dalam Relativitas Umum. Berbagai kemudahan yang ditawarkan *worksheet* merupakan salah satu daya tarik penggunaan Excel dalam hal ini.

## STUDI PUSTAKA

Di dalam berbagai buku ajar tentang Teori Relativitas Umum, Efek Doppler merupakan salah satu topik yang baku untuk dibahas karena efek ini merupakan salah satu eksperimen penting yang digunakan untuk membuktikan kekuatan (seringkali dikatakan sebagai kebenaran) dari Teori Relativitas Umum ((Hartle, 2003)[4],(Moller, 1955)[5]). Semua buku

ajar yang dijumpai selalu membatasi diri pada kasus khusus yaitu sumber dan penerima berada dalam keadaan diam. Memang keadaan seperti itulah yang sesuai dengan eksperimen yang dilakukan (Narlikar, 1994)[6]. Untuk sumber dan penerima yang bergerak sudah dijumpai pembahasannya namun hanya untuk gejala yang non-relativistik ((Saba dan Rosa, 2003)[7],(Kapoulitsas, 1981)[8]).

Dalam penelitian ini akan dilakukan perluasan terhadap kasus yang ditinjau (dalam konteks Relativitas Umum) yaitu sumber dan penerima berada dalam keadaan bergerak. Karena gerak sumber dan penerima bisa sembarang maka diperlukan perhitungan numerik.

Dalam penelitian ini akan ditekankan perhitungan numerik dari segi konseptual sehingga dirasa paling tepat dalam konteks ini menggunakan bahasa pemrograman Excel beserta VBA yang dikenal juga penggunaannya dalam fisika ((Blattner, 1999)[9],(Liengme, 2002)[10],(Moore dan Schroeder, 2015)[11]).

## METODE PENELITIAN

Dalam konteks Relativitas Umum perlu ditentukan ruang-waktu yang menjadi latar belakang suatu gejala atau fenomenon. Dalam penelitian ini dipilih ruang-waktu Schwarzschild karena kesederhanaan dan luasnya pemakaian ruang-waktu ini dalam astrofisika.

Ruang-waktu Schwarzschild bisa dinyatakan sebagai  $ds^2 = g_{00}(r) * dt^2 - g_{11}(r) * dr^2 - r^2 * d\Omega^2$  dengan  $g_{00}(r)$  dan  $g_{11}(r)$  menyatakan tensor metrik dan  $d\Omega$  menyatakan bagian sudut dari sistem koordinat bola yang digunakan. Misalnya gerak sumber dinyatakan sebagai  $r_1(t)$  dan gerak penerima dinyatakan sebagai  $r_2(t)$  untuk menggambarkan keadaan gerak yang sembarang.

Misalnya pada saat  $t_1$  sumber memancarkan sebuah foton. Foton itu akan menjalani lintasan yang memenuhi persamaan diferensial  $0 = g_{00}(r) * dt^2 - g_{11}(r) * dr^2$  yang dengan syarat awal bahwa pada  $t = t_1$  posisi foton adalah  $r = r_1(t_1)$  akan bisa diselesaikan secara numerik atau dalam konteks Excel kita akan bisa mendapatkan tabel antara  $t$  versus  $r_f(t)$  untuk lintasan foton. Sementara itu kita juga bisa membuat tabel antara  $t$  versus  $r_2(t)$  untuk lintasan penerima. Lintasan foton akan bertemu dengan lintasan penerima pada saat  $t = t_2$  dimana  $r_f(t_2) = r_2(t_2)$ .

Prosedur di atas diulang lagi untuk pemancaran foton pada saat  $t = t_1 + dt_1$  yang kemudian akan diterima oleh penerima pada saat  $t = t_2 + dt_2$ . Waktu pribadi pada saat pemancaran adalah  $dT_1^2 = g_{00}(r_1(t_1)) * dt_1^2 - g_{11}(r_1(t_1)) * dr_1^2$  sedangkan waktu

pribadi saat penerimaan adalah  $dT^2 = g00(r^2(t2)) * dt^2 - g11(r^2(t2)) * dr^2$ .

Efek Doppler adalah perbandingan antara  $dT1$  dengan  $dT2$  yaitu  $dT2/dT1$  yang dalam hal ini diperoleh secara numerik. Jika diinginkan maka prosedur ini bisa diulang untuk berbagai nilai  $t1$  sehingga akan diperoleh  $dT2/dT1$  sebagai fungsi  $t1$ .

### HASIL PENELITIAN

Telah berhasil disusun program dalam Excel beserta VBA (yang bisa dilihat dalam Gambar 1 dan Gambar 2) tentang Efek Doppler dalam ruang-waktu Schwarzschild dengan sumber dan pengamat dalam keadaan bergerak secara sembarang. Kemudahan *worksheet* adalah dalam hal memvariasi masukan yang hasilnya langsung bisa dilihat dan bahkan juga sangat mudah melakukan perubahan pada program VBA nya.

### KESIMPULAN

Penelitian ini telah berhasil menyusun sebuah program komputer dalam bahasa pemrograman Excel beserta VBA untuk menentukan efek Doppler dalam ruang-waktu Schwarzschild dengan pengamat dan sumber dalam keadaan bergerak secara sembarang. Penggunaan bahasa pemrograman Excel beserta VBA dirasakan sangat membantu karena menawarkan berbagai kemudahan yang tidak dijumpai dalam bahasa pemrograman lain.

### PENULIS

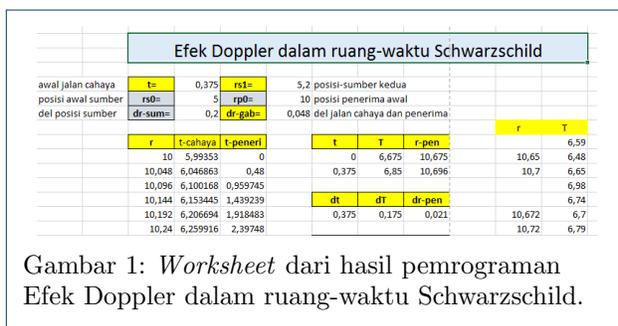
A. Hermanto  
 Dari :  
 Departemen Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Gadjah Mada

#### Pustaka

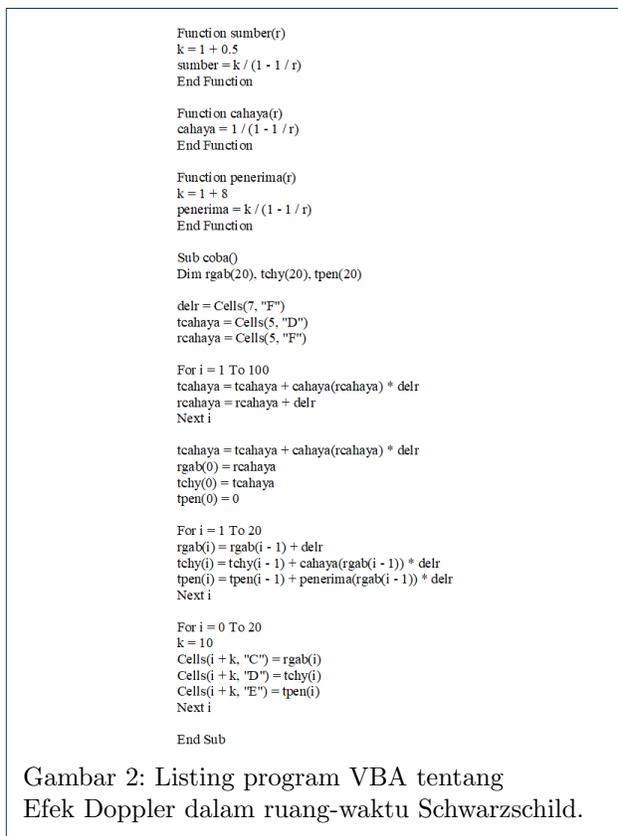
1. M. Mandelkern, 1985, Constructive Mathematics, *Mathematics Magazine*, **58**, 272.
2. P. M. - Loef, 1984, Constructive Mathematics and Computer Programming, *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* **A312**, 501.
3. G. Hellman, 1998, Mathematical Constructivism in Spacetime, *Brit. J. Phil. Sci.* **49**, 425.
4. Hartle, J B, 2003, *Gravity : An introduction to Einstein's general relativity*, Addison Wesley, San Francisco.
5. Moller, C, 1955, *The theory of relativity*, Oxford University Press, London.
6. Narlikar, J V, 1994, Spectral shift in general relativity, *Am. J. Phys.*, **62**, 903.

7. Saba, M M F and Rosa, R A de S, 2003, The Doppler effect of sound source moving in a circle, *Phys. Teach.*, **41**, 90
8. Kapoulitsas, G M, 1981, On the non-relativistic Doppler effect, *Eur. J. Phys.*, **2**, 174.
9. Blattner, P., 1999, *Excel Functions in Practice*, Que, Indianapolis, IN
10. Liengme, B.V., 2002, *Microsoft Excel 2002 for Scientists and Engineers*, Elsevier.
11. Moore, T.A. and Schroeder, D.V., 2015, A different approach to introducing statistical mechanics, *arXiv:1502.07051v1*.

### DAFTAR GAMBAR



Gambar 1: Worksheet dari hasil pemrograman Efek Doppler dalam ruang-waktu Schwarzschild.



Gambar 2: Listing program VBA tentang Efek Doppler dalam ruang-waktu Schwarzschild.