ARTIKEL RISET

Visualisasi Fungsi Legendre dan Perilaku dari Permukaan Bola Harmonik dengan Menggunakan Bahasa Pemrograman Matlab

Ari Setiawan

Ringkasan

Telah dilakukan penelitian yang berhubungan dengan medan potensial gravitasi di permukaan bumi yang merupakan persamaan harmonik bola. Harmonik bola tersebut merupakan penyelesaian dari persamaan Laplace, dalam sistem koordinat bola. Persamaan ini dikenal dengan *Associated Legendre Functions*. Pada penelitian ini dikembangkan visualisasi *Associated Legendre Functions* atau disebut juga dengan *Spherical Harmonic Functions* dalam tampilan 1D, 2D, 3D dengan menggunakan pemrograman MATLAB. Telah berhasil dikembang visualisasi dalam koordinat bola untuk fungsi $r + P_n^m(x)$ dengan $r = 5$ dan $P_n^m(x)$ yaitu *Associated Legendre Functions* untuk derajat $n =$ dari 1 sampai 7 dan dengan orde $m \leq n$.

Kata Kunci : Persamaan Laplace, sistem koordinat bola, *Associated Legendre Functions*, *Spherical Harmonic Functions*

Abstract

Research has been conducted relating to the gravitational potential field on the earth's surface which is a spherical harmonic equation. S harmonics are the completion of the Laplace equation, in the spherical coordinate system. This equation is known as Associated Legendre Functions. In this study visualization of Associated Legendre Functions or also called the Spherical Harmonic Functions in 1D, 2D, 3D visualization using MATLAB programming was developed. Visualization has been successfully developed in spherical coordinates for the function $r + P_n^m(x)$ with $r = 5$ and $P_n^m(x)$ that is Associated Legendre Functions for degrees $n =$ from 1 to 7 and with the order $m \leq n$.

Keywords: Laplace equation; spherical coordinate system; Associated Legendre Functions; Spherical Harmonic Functions

1. Pendahuluan

Harmonik sferis adalah merupakan penyelesaian dari persamaan Laplace.[1]
Persamaan Laplace dalam sistem koordinat bola[2, 3]:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2} = 0 \quad (1)$$

Correspondence: $ari_setiawan@ugm.ac.id$

Departmen Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta, Indonesia

Full list of author information is available at the end of the article

*Equal contributor

Dengan : r adalah jari-jari, θ adalah *colatitude*, λ adalah bujur

Penyelesaian Laplasian dengan pemisahan variabel $f = R(r)P(\theta)L(\lambda)$, untuk: $R(r) = r^l$, $f = r^l P(\theta)L(\lambda)$ adalah:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial r^l P(\theta)L(\lambda)}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial r^l P(\theta)L(\lambda)}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 r^l P(\theta)L(\lambda)}{\partial \lambda^2} = 0$$

$$l(l+1)r^{l-2}P(\theta)L(\lambda) + \frac{1}{\sin\theta P(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial P(\theta)}{\partial \theta}\right)$$

$$r^{l-2}P(\theta)L(\lambda) + \frac{1}{\sin^2\theta L(\lambda)}\frac{\partial^2 L(\lambda)}{\partial \lambda^2}r^{l-2}P(\theta)L(\lambda) = 0$$

$$l(l+1) + \frac{1}{\sin\theta P(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial P(\theta)}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{sin^2\theta L(\lambda)}\frac{\partial^2 L(\lambda)}{\partial\lambda^2} = 0 \tag{2}$$

suku ketiga merupakan satu-satunya tempat di mana λ muncul, sehingga harus sama dengan konstanta

$$\frac{1}{L(\lambda)}\frac{\partial^2 L(\lambda)}{\partial\lambda^2} = konstan = -m^2$$

m adalah interger

$$L(\lambda) = A_m \cos m\lambda + B_m \sin m\lambda$$
$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial P(\theta)}{\partial\theta}\right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]P(\theta) = 0$$

dinamakan *Associated Legendre Functions (Spherical Harmonic Functions)*, untuk $m \leq l$, solusi umumnya adalah

$$P_{l,m}(\cos\theta) = \frac{(1-\cos^2\theta)^{m/2}}{2^l l!}\frac{d^{l+m}(cos^2\theta - 1)^l}{d(\cos\theta)^{l+m}} \tag{3}$$

persamaan diatas dapat dituliskan sebagai berikut, jika $\mu = cos\theta$

$$P_{l,m}(\mu) = \frac{(1-\mu^2)^{m/2}}{2^l l!}\frac{d^{l+m}(\mu^2 - 1)^l}{d(\mu)^{l+m}} \tag{4}$$

dalam hal ini, penyelesaian $\nabla^2 f = 0$ adalah

$$f = r^l P_{l,m}(\cos\theta)[A_m \cos m\lambda + B_m \sin m\lambda]$$

dapat dibuktikan juga jika $R(r) = r^{-(l+1)}$ maka

$$f = r^{-(l+1)} P_{l,m}(\cos\theta)[A_m \cos m\lambda + B_m \sin m\lambda]$$

dengan l =derajat dan, m =orde

Untuk $m = 0$, ada bagian dari "*Associated Legendre Polinomial*" yang disebut sebagai "*Legendre polinomial*" atau $P_l(\cos\theta)$. Tetapi hal tersebut hanya bisa menggambarkan apa yang disebut "*zonal terms*" dan tidak cukup untuk mencocokkan dengan permukaan bola harmonik.

Polinomial Legendre diberikan oleh:

$$P_l(\mu) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l(\mu^2 - 1)^l}{d\mu^l} \tag{5}$$

dalam bentuk lain sesuai dengan fungsi dalam MATLAB Rumus-rumus *Associated Legendre Functions (Spherical Harmonic Functions)* dapat dituliskan sebagai berikut:

$$P_n^m(x) = (-1)^m(1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x) \tag{6}$$

dengan $P_n(x)$ adalah polynomial derajat n:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\left[\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\right]$$

Bagian dari solusi yang merupakan fungsi dari θdan λ adalah

$$P_{l,m}(\cos\theta)A_m \cos m\lambda + B_m \sin m\lambda$$

dikenal sebagai permukaan bola harmonik, karena ada kuantitas yang didefinisikan di atas permukaan bola yang dapat dinyatakan sebagi jumlah permukaan bola harmonik.

Tujuan penelitian adalah untuk membisualisasikan fungsi Legender dan perilaku dari permukaan bola harmonik dalam tiga dimensi (3D).

METODE PENELITIAN

Dalam penelitian ini metodologi yang digunakan adalah dengan membuat program visualisasi dengan MATLAB baik dalam satu dimensi, dua dimensi, dan tiga dimensi untuk Polinomial Legender maupun *Associated Legendre Functions (Spherical Harmonic Functions)*.

1 Untuk menvisualisasikan Polinomial Legender derajat n dalam satu dimensi (1D) langkah-langkah sebagai berikut:
   (a) menghitung Associated Legendre Functions, $P_n^m(x)$ untuk derajat $n = 0$–7 dan $m \leq n$
   (b) pemilihan polinomial Legendre derajat n, dengan $n = 1, 2, 3, ...7$ dan $m = 0$
   (c) visualisasi satu dimensi (1D) fungsi $P_n^m(x)$ terhadap x

2 Untuk memvisualisasikan *Associated Legendre Functions (Spherical Harmonic Functions)* dalam satu dimensi (1D) langkah-langkah sebagai berikut:
   (a) menghitung Associated Legendre Functions, $P_n^m(x)$ untuk derajat $n = 0$–7 dan $m \leq n$
   (b) pemilihan polinomial Legendre derajat $n =$ 1–7 dan orde $m = m \leq n$
   (c) visualisasi satu dimensi (1D) fungsi $P_n^m(x)$ terhadap x

3 Untuk menvisualisasikan Polinomial Legender $P_n(x)$ derajat n dalam dua dimensi (2D) langkah-langkah sebagai berikut:

Tabel 1: Polinomial Legender untuk derajat 0 sampai 5

n	$P_n(\theta)$	$P_n(\mu)$
0	1	1
1	$\cos\theta$	μ
2	$\frac{1}{4}(3\cos 2\theta + 1)$	$\frac{1}{2}(3\mu^2 - 1)$
3	$\frac{1}{8}(5\cos 3\theta + 3\cos\theta)$	$\frac{1}{2}(5\mu^3 - 3\mu)$
4	$\frac{1}{64}(35\cos 4\theta + 20\cos 2\theta + 9)$	$\frac{1}{8}(35\mu^4 - 30\mu^2 + 3)$
5	$\frac{1}{128}(63\cos 5\theta + 35\cos 3\theta + 30\cos\theta)$	$\frac{1}{8}(63\mu^5 - 70\mu^3 + 15\mu)$

(a) menentukan persamaan dalam koordinat polar dengan $r = 5$
(b) menghitung Associated Legendre Functions, $P_n^m(x)$ untuk derajat $n = 0$–7 dan $m \leq n$
(c) pemilihan polinomial Legendre derajat n, dengan $n = 1, 2, 3, ...7$ dan $m = 0$
(d) perhitungan $R_n = R + P_n(x)$
(e) visualisasi $R_n = R + P_n(x)$ untuk dua dimensi (2D)

4 Untuk menvisualisasikan *Associated Legendre Functions (Spherical Harmonic Functions $P_n^m(x)$)* dalam tiga dimensi (3D) langkah-langkah sebagai berikut:
(a) menentukan derajat n dan orde m dari fungsi $P_n^m(x)$
(b) membuat grid phi dan theta
(c) perhitungan harmonik
(d) penerapan pada koordinat bola
(e) plot pada permukaan bola

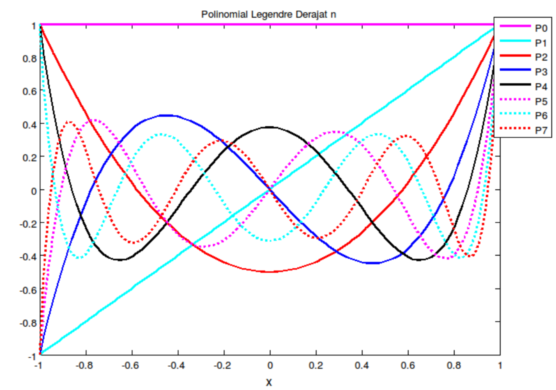
HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam penelitian ini telah berhasil dibuat visualisasi program *Polinomilal Legendre dan Associated Legendre Functions* dalam tampilan satu dimensi (1D), dua dimensi (2D), dan tiga dimensi (3D). Program-program dan visualisasi adalah sebagai berikut:

Program Matlab Fungsi terkait Legendre[4, 5]:

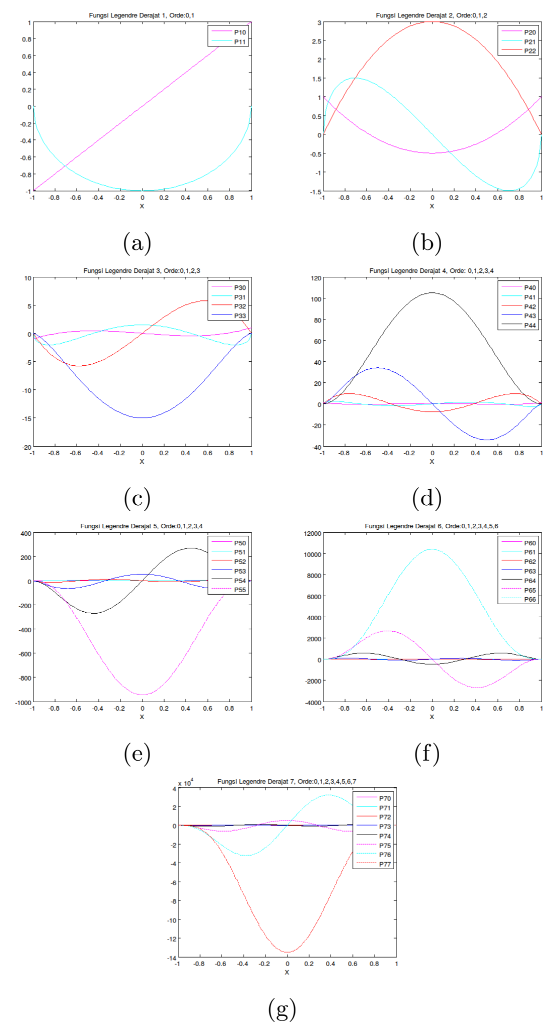
```
% Program Matlab untuk polinomial
% Legendre derajat n
% Visualisasi untuk satu dimensi (1D)
Prog1_Legendre.m
% perhitungan Associated
% Legendre Functions
% P_n^m(x) untuk derajat n=0-7
% dan m<= n
% untuk n=1,2,3, ...7; m<= n
P0=legendre(0,-1:0.02:1);
P1=legendre(1,-1:0.02:1);
P2=legendre(2,-1:0.02:1);
P3=legendre(3,-1:0.02:1);
P4=legendre(4,-1:0.02:1);
P5=legendre(5,-1:0.02:1);
P6=legendre(6,-1:0.02:1);
P7=legendre(7,-1:0.02:1);
% pemilihan polinomial Legendre derajat n
% untuk n=1, 2, 3, ...7; m = 0
p0=P0(1,:);
p1=P1(1,:);
p2=P2(1,:);
p3=P3(1,:);
p4=P4(1,:);
p5=P5(1,:);
p6=P6(1,:);
p7=P7(1,:);
% Visualisasi P_n(x) untuk satu dimensi (1D)
x=(-1:0.02:1);
plot(x,p0,'m');
hold on;
plot(x,p1,'c');
hold on;
plot(x,p2,'r');
hold on;
plot(x,p3,'b');
hold on;
plot(x,p4,'k');
hold on;
plot(x,p5,':m');
hold on;
plot(x,p6,':c');
hold on;
plot(x,p7,':r');
```

Visualisasi 1 Dimensi



Gambar 1: Polinomial Legendre $P_n(x)$ derajat n, dengan n=0 sampai 7.

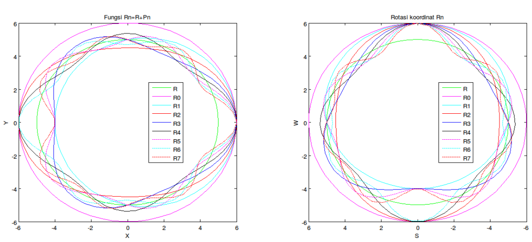
```
% Program Matlab untuk Associated Legendre
% Functions (Spherical Harmonic Functions)
% P_n^m(x) untuk derajat n=0-7
% dan m<=n
% Visualisasi untuk satu dimensi (1D)
Prog2_Legendre.m
% perhitungan Associated Legendre
% Functions
% P_n^m(x) untuk derajat n=0-7 dan m<=n
% untuk n=1, 2, 3, ...7; m <= n
P0=legendre(0,-1:0.02:1);
P1=legendre(1,-1:0.02:1);
P2=legendre(2,-1:0.02:1);
P3=legendre(3,-1:0.02:1);
P4=legendre(4,-1:0.02:1);
P5=legendre(5,-1:0.02:1);
P6=legendre(6,-1:0.02:1);
P7=legendre(7,-1:0.02:1);
% pemilihan polinomial Legendre derajat 7
%  orde m
% untuk n=7; m = 0, 1, 2, 3, ...7
p70=P7(1,:);
p71=P7(2,:);
p72=P7(3,:);
p73=P7(4,:);
p74=P7(5,:);
p75=P7(6,:);
p76=P7(7,:);
p77=P7(8,:);
x=(-1:0.02:1);
% Visualisasi P_n^m(x) untuk
% satu dimensi (1D)
plot(x,p70,'m');
hold on;
plot(x,p71,'c');
hold on;
plot(x,p72,'r');
hold on;
plot(x,p73,'b');
hold on;
plot(x,p74,'k');
hold on;
plot(x,p75,':m');
hold on;
plot(x,p76,':c');
hold on;
plot(x,p77,':r');
```



Gambar 2: Associated Legendre Functions $P_n^m(x)$ derajat n dan orde m, untuk (a) n=1, m=0,1, (b) n=2, m=0,1,2 (c) n=3, m=0,1,2,3, (d) n=4, m=0,1,2,3,4, (e) n=5, m=0,1,2,3,4,5, (f) n=6, m=0,1,2,3,4,5,6, (g) n=7, m=0,1,2,3,4,5,6,7.

```
% Program Matlab untuk polinomial
% Legendre derajat n
% Visualisasi P_n(x) untuk
% dua dimensi (2D)
Prog3_Legendre.m
% Penerapan persamaan koordinat polar
% r = 5
t=linspace(0,2*pi,60);
x=cos(t);
y=sin(t);
xx=5*cos(t);
yy=5*sin(t);
% perhitungan Associated
% Legendre Functions
% P_n^m(x) untuk derajat n=0-7
% dan m<=n
% untuk n=1, 2, 3, ...7; m <= n
P0=legendre(0,x);
P1=legendre(1,x);
P2=legendre(2,x);
P3=legendre(3,x);
P4=legendre(4,x);
P5=legendre(5,x);
P6=legendre(6,x);
P7=legendre(7,x);
% pemilihan polinomial Legendre derajat n
% untuk n=1, 2, 3, ...7; m = 0
p0=P0(1,:);
p1=P1(1,:);
p2=P2(1,:);
p3=P3(1,:);
p4=P4(1,:);
p5=P5(1,:);
p6=P6(1,:);
p7=P7(1,:);
% perhitungan R_n=R+P_n(x)
x0=xx+p0.*x;
y0=yy+p0.*y;
x1=xx+p1.*x;
y1=yy+p1.*y;
x2=xx+p2.*x;
y2=yy+p2.*y;
x3=xx+p3.*x;
y3=yy+p3.*y;
x4=xx+p4.*x;
y4=yy+p4.*y;
x5=xx+p5.*x;
y5=yy+p5.*y;
x6=xx+p6.*x;
y6=yy+p6.*y;
x7=xx+p7.*x;
y7=yy+p7.*y;
% Visualisasi R_n=R+P_n(x) untuk
% dua dimensi (2D)
plot(xx,yy,'g');
hold on;
plot(x0,y0,'m');
hold on;
plot(x1,y1,'c');
hold on;
plot(x2,y2,'r');
hold on;
plot(x3,y3,'b');
hold on;
plot(x4,y4,'k');
hold on;
plot(x5,y5,':m');
hold on;
plot(x6,y6,':c');
hold on;
plot(x7,y7,':r');
```

Visualisasi 2 Dimensi



(a) (b)

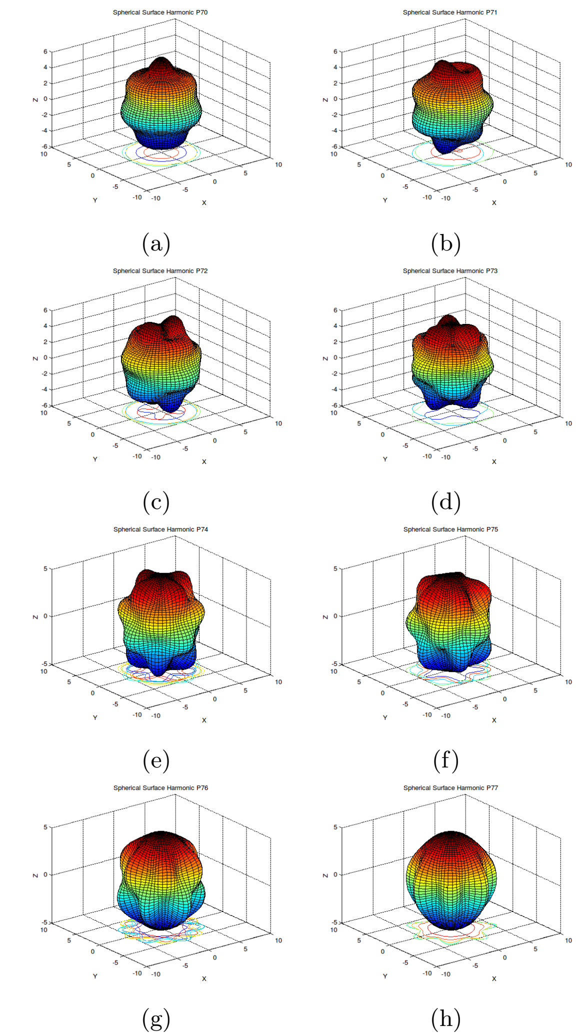
Gambar 3: (a) Fungsi $R_n = R + P_n(x)$ untuk dua dimensi (2D), dengan $R = 5$ dan Polinomilal Legendre $P_n(x)$ derajat n sebagai fungsi x dalam dua dimensi (2D), dengan $n = 0$ sampai 7, (b) Rotasi koordinat sebesar 90^o berlawanan arah jarum jam sesuai dengan koordinat bumi.

```
% Program Matlab untuk Associated Legendre
% Functions (Spherical Harmonic Functions)
% Visualisasi untuk tiga dimensi (3D)
Prog5_Legendre.m
% Penentuan konstanta
degree = 7;
order = 7;
 % Pembuatan grid
delta = pi/60;
theta = 0 : delta : pi; % altitude
phi = 0 : 2*delta : 2*pi; % azimuth
[phi,theta] = meshgrid(phi,theta);
 % Perhitungan harmonik
Ymn = legendre(degree,cos(theta(:,1)));
```

```
Ymn = Ymn(order+1,:)';
yy = Ymn;
for kk = 2: size(theta,1);
yy = [yy Ymn];
end;
yy = yy.*cos(order*phi);
 order = max(max(abs(yy)));
rho = 5 + 1*yy/order;
 % Penerapan persamaan koordinat bola
r = rho.*sin(theta);
x = r.*cos(phi);
y = r.*sin(phi);
z = rho.*cos(theta);
 % Plot pada permukaan
surfc(x,y,z)
```

Visualisasi 3 Dimensi

Visualisasi fungsi $R_n^m = R + \frac{P_n^m(x)}{P_n^m(x)maks}$ pada koordinat bola, adalah fungsi R pada derajat n orde m ditambah normalisasi Associated Legendre Functions (Spherical Harmonic Functions) derat n orde m. Dalam penelitian ini divisualisasikan untuk *Normalisasi Spherical Harmonic Functions* pada permukaan bola dengan $R = 5$, untuk (a) $n = 7$, $m = 0$, (b) $n = 7, m = 1$, (c) $n = 7, m = 2$, (d) $n = 7$, $m = 3$, (e) $n = 7$, $m = 4$, (f) $n = 7$, $m = 5$, (g) $n = 7$, $m = 6$, (h) $n = 7$, $m = 7$.



Gambar 4: *Normalisasi Spherical Harmonic Functions* pada permukaan bola dengan $R = 5$, untuk (a) $n = 7$, $m = 0$, (b) $n = 7$, $m = 1$, (c) $n = 7$, $m = 2$, (d) $n = 7$, $m = 3$, (e) $n = 7$, $m = 4$, (f) $n = 7$, $m = 5$, (g) $n = 7$, $m = 6$, (h) $n = 7$, $m = 7$.

KESIMPULAN

Dalam penelitian ini telah berhasil dibuat visualisasi program Polinomilal Legendre dan Associated Legendre Functions dalam tampilan:

1 Satu dimensi berupa grafik *Polinomilal Legendre* $P_n(x)$ derajat n, dengan $n = 0$ sampai 7 dan *Associated Legendre Functions* $P_n^m(x)$ derajat n dan orde m, untuk $n = 0$–7 dan $m \leq n$

2 Dua dimensi berupa grafik Fungsi ($R_n = R + P_n(x)$), dengan $R = 5$ dan *Polinomilal Legendre* $P_n(x)$ derajat n sebagai fungsi x, dengan $n = 0$ sampai 7. Rotasi koordinat sebesar 90^o berlawanan arah jarum jam sesuai dengan koordinat bumi.

3 Tiga dimensi berupa *Normalisasi Spherical Harmonic Functions* $R_n^m(x) = R + \frac{P_n^m(x)}{P_n^m(x)maks}$ pada permukaan bola dengan $R = 5$, untuk $n =$ 0–7 dan $m \leq n$

PENULIS

1 Ari Setiawan
Dari :
(1) Departemen Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan, Universitas Gadjah Mada

Pustaka

1. Telford WM, Geldart LP, Sheriff RE, Keys DA. Applied geophysics:Cambridge. New York, U.S.A.: Cambridge; 1981.
2. BOAS ML. Mathematical methods in the physical sciences. 2nd ed. John Wiley & Sons, Inc.; 1983.
3. Torge W. Gravimetry: de-Gruyter, Berlin. New York; 1989.
4. Hanselman D, Littlefield B. The student edition of MATLAB: version 4: user's guide: with tutorial, The Math Works, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, Inc., A Simon & Schuster Company; 1995.
5. The MathWorks I. MathWork MATLAB. The MathWorks, Inc;.