Jurnal Fisika Indonesia — Huda dan Rosyid
Vol. *19* (*2015*) No. *57* p.1-5

ARTIKEL RISET

Menuju Mekanika Kuantum Modular

Didik Nur Huda[1] dan M. Farchani Rosyid[2*]

Abstrak

Telaah mekanika kuantum selama ini dibangun di atas ruang Hilbert, yakni ruang vektor kompleks dengan produk skalar hji : $(\cdot|\cdot) : V \times V \to \mathbb{C}$ dengan V ruang vektor atas bilangan kompleks $\mathbb{C}$. Modul Hilbert merupakan perumuman dari ruang Hilbert, dengan mengganti himpunan skalar menjadi gelanggang $\mathbb{R}$ dengan syarat tertentu sehingga merupakan modul Hilbert. Gelanggang $\mathbb{R}$ yang dimaksud adalah gelanggang bilangan. Modul Hilbert inilah yang akan digunakan untuk membangun fondasi mekanika kuantum modular ini.

kata kunci: skalar; gelanggang; modul Hilbert; mekanika kuantum

Abstract

The study of quantum mechanics has been built on a Hilbert space, the complex vector space with inner product $(\cdot|\cdot) : V \times V \to \mathbb{C}$ with V is a complex vector space dan $\mathbb{C}$ is complex numbers. Hilbert module is a generalization of Hilbert space, by changing the scalar set become ring $\mathbb{R}$ with certain conditions so that a Hilbert module. This ring is called the number ring. Hilbert modules that will be used to build the modular foundations of quantum mechanics.

keywords: scalar; Ring; Hilbert module; quantum mechanics

1. Pendahuluan

Perumusan mekanika kuantum yang secara luas dikenal saat ini dibangun dalam ruang Hilbert sebagai ruang keadaan. Ruang Hilbert merupakan ruang vektor kompleks karena skalar yang dipilih adalah bilangan-bilangan kompleks. Ruang vektor merupakan objek matematika yang dibangun di atas skalar-skalar yang disebut lapangan (field) [1]. Perluasan konsep ruang vektor adalah modul, yakni dengan mengganti lapangan dengan konsep yang lebih umum yakni gelanggang. Mekanika kuantum juga telah dirumuskan dengan menggunakan kuaternion sebagai gelanggang bagi modul Hilbert [2, 3, 4]. Sebelumnya De Leo pada tahun 1998 juga berupaya membangun mekanika kuantum di atas oktonion. Dalam mekanika kuantum kuaternion gelanggang yang digunakan adalah bilangan kuaternion, sedangkan mekanika kuantum biasa yang digunakan adalah bilangan kompleks. Dalam mekanika kuantum oktonion, oktonion bukanlah gelanggang karena sifat tak asosiatifnya. Bilangan-bilangan tersebut digunakan untuk melabeli ruang vektor sebagai keadaan kuantum. [5, 6, 7]

*Korespondensi: farchani@ugm.ac.id
[2]Jurusan Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Gadjah Mada, Sekip Utara PO BOX BLS 21, 55281 Yogyakarta, Indonesia
Informasi lengkap tentang penulis dapat dilihat pada akhir artikel

2. Kuaternion

Kuaternion didefinisikan sebagai

$$q = a + ib + jc + kd \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \tag{1}$$

dengan

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \tag{2}$$

Konjugasi kuaternion diberikan oleh

$$\bar{q} = a - ib - jc - kd \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}. \tag{3}$$

Ruang kuaternion selanjutnya disimbolkan $\mathbb{H}$. Norma pada kuaternion dideskripsikan pada persamaan (4) berikut

$$\|q\|^2 = \|q\bar{q}\| = a^2 + b^2 + c^2 + d^2. \tag{4}$$

Setiap kuaternion yang tak nol mempunyai invers tunggal yaitu

$$q^{-1} = \frac{1}{q} = \frac{\bar{q}}{|q|} \tag{5}$$

[8, 9, 10].

2.1 Mekanika Kuantum Kuaternionik

Keadaan dalam mekanika kuantum kuaternion dapat dideskripsikan sebagai vektor $|\psi\rangle$ dalam ruang Hilbert kuaternionik $V_{\mathbb{H}}$ [4]. Vektor $|\psi\rangle$ dapat dinyatakan dengan vektor lain anggota dari $V_{\mathbb{H}}$, yaitu

$$|\psi\rangle = |\varphi\rangle\, q, \tag{6}$$

dengan $|\psi\rangle \in V_{\mathbb{H}}$ dan $q \in \mathbb{H}$. Operator pada mekanika kuantum kuaternionik didefinisikan sebagai $O_{\mathbb{H}}$ yang bekerja pada keadaan kuaternionik menurut persamaan berikut,

$$O_{\mathbb{H}}\left(|\psi\rangle q\right) = \left(O_{\mathbb{H}}|\psi\rangle\right) q \quad q \in \mathbb{H} \tag{7}$$

[8, 11, 12].

2.2 Permasalahan Swanilai Kompleks Kanan dalam Mekanika Kuantum Kuaternionik

Persamaan swanilai kanan untuk operator $O_{\mathbb{H}}$ sebagai berikut

$$O_{\mathbb{H}}\,|\psi\rangle = |\psi\rangle\, q, \tag{8}$$

dengan $|\psi\rangle \in V_{\mathbb{H}}$ yang merupakan swavektor operator $O_{\mathbb{H}}$ dan $q \in \mathbb{H}$. Terdapat korespondensi satu-satu antara keadaan dengan unit spektrum dalam bentuk

$$|r\rangle = |\psi\rangle\, u. \tag{9}$$

Keadaan $|\psi\rangle\, u$ berkorespondensi dengan keadaan yang sama $|\psi\rangle$ yang mempunyai swavektor $O_{\mathbb{H}}$ dengan swanilai $\bar{u}qu$,

$$O_{\mathbb{H}}\,|\psi\rangle\, u = |\psi\rangle\, \bar{u}qu. \tag{10}$$

Selanjutnya terdapat himpunan spektrum swanilai $\left\{q, \bar{u_1}qu_1, ..., \bar{u_1}qu_l, ...\right\}$ dengan u_l kuaternion uniter. Himpunan swanilai tersebut terkait dengan himpunan swavektor $\left[|\psi\rangle, |\psi\rangle\, u_1, ..., |\psi\rangle\, u_l, ...\right]$. Kemudian dipilih wakilan dari spektrum

$$|\Psi\rangle = |\psi\rangle\, u_\lambda, \tag{11}$$

dengan $|\psi\rangle \in V_{\mathbb{H}}$ dan $\lambda \in \mathbb{C}$.

Pembuktian masalah swanilai kompleks ini dapat dilihat di artikel [7].

3. Gelanggang Bilangan

Gelanggang bilangan R ini merupakan perumuman dari $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Gelanggang R ini adalah suatu gelanggang yang padanya terdapat involusi, bernorma, dan unital. Involusi adalah pemetaan $* : R \to R$ sedemikian rupa sehingga sifat berikut terpenuhi:

1 $(a^*)^* = a$
2 $(ab)^* = b^* a^*$ dan
3 $(a+b)^* = a^* + b^*$,

untuk semua $a, b \in R$. Unsur $a \in R$ dikatakan riil jika $a = a^*$, untuk setiap $a \in R$. Unsur a anggota gelanggang R dikatakan positif apabila terdapat unsur b yang juga anggota R^+ sedemikian rupa sehingga berlaku $a = b * b$. Norma yang dimaksud adalah

$$\|\cdot\|\, \mathbb{M} :\to R^+ \tag{12}$$

yang memiliki sifat $a^*a = aa^* = \|a\|^2$, untuk setiap $a \in R$. Selain itu norma ini mempunyai sifat $\|ab\| \leq \|a\|\,\|b\|$, untuk setiap $a, b \in R$. Gelanggang unital adalah gelanggang yang memiliki elemen $1 \in R$. Unsur $c \in R$ dikatakan lebih besar atau sama dengan unsur $a \in R$, ditulis $a \leq c$, jika $c - a$ positif. Dengan demikian interval [0,1] dapat didefinisikan menurut $[0,1] = \left\{a \in R^+ | a \leq 1\right\}$ Selanjutnya gelanggang bilangan inilah yang akan digunakan dalam mekanika kuantum modular ini [13, 14, 1].

4. Mekanika Kuantum Modular

Mekanika kuantum modular dibangun di dalam modul Hilbert di atas gelanggang bilangan R bahwa mekanika kuantum biasa dan kuaternion tercakup di dalamnya. Berikut akan disajikan aksioma-aksioma yang menggambarkan mekanika kuantum tersebut [15] :

Postulat 1:

Suatu sistem kuantum berpadanan dengan sebuah modul Hilbert M bebas kanan di atas gelanggang bilangan R. Setiap keadaan sistem kuantum tersebut diwakili oleh sekumpulan anggota-anggota modul M.

Setiap anggota modul M mewakili secara tunggal sebuah keadaan. Dalam mekanika kuantum biasa, vektor $|\psi\rangle$ dan vektor $|\psi'\rangle$ yang dapat dituliskan sebagai perkalian antara $|\psi\rangle$ dengan skalar α, yakni $|\psi'\rangle = |\psi\rangle = \alpha\,|\psi\rangle$ mewakili keadaan yang sama. Dalam hal ini, vektor $|\psi\rangle$ dan $|\psi'\rangle$ dapat dikatakan berada dalam satu kelas ekivalen sebagaimana pengertian relasi ekivalen yakni refleksif, simetris, dan transitif. Dua buah vektor dari kelas yang sama oleh karena itu mewakili keadaan yang sama. Dalam mekanika kuantum modular kenyataan semacam itu tidak harus berlaku.

Kesulitan terkait dengan sifat gelanggang yang dipakai:

1 Relasi seperti yang didefinisikan dalam mekanika kuantum biasa bahwa $|\psi'\rangle$ dan $\alpha\,|\psi\rangle$ mewakili keadaan yang sama tidak berlaku sebagai relasi ekivalen dalam mekanika kuantum modular, karena melanggar sifat simetris dalam relasi ekivalen meskipun sifat refleksif dan transitif berlaku.
Bukti: Jika $|\psi'\rangle = |\psi\rangle\,\alpha$ maka tidak harus ada α' sedemikian rupa sehingga berlaku $|\psi\rangle = |\psi'\rangle\,\alpha'$, sebab belum tentu α' invertibel.

Jalan keluar dari masalah ini adalah mendefinisikan ekivalensi dua buah vektor dalam modul M dengan cara yang sedikit berbeda: vektor $|\psi\rangle$ dikatakan ekivalen dengan $|\psi'\rangle$ jika ditemukan sebuah skalar $\alpha \in R$ yang invertibel sedemikian rupa sehingga $|\psi'\rangle = |\psi\rangle\, \alpha$. Dapat dibuktikan relasi ekivalen semacam ini *well defined.* Perlu diingat bahwa dua buah vektor yang ekivalen tidak sejajar satu dengan yang lain.

2 Jika relasi ekivalen didefinisikan seperti di atas maka tidak setiap kelas ekivalen memuat vektor satuan. Oleh karena itu tidak setiap kelas ekivalen mewakili keadaan. Hal ini dapat dijelaskan sebagai berikut:
Andaikan R^{in} subhimpunan R yang memuat anggota-anggota yang invertibel. Untuk vektor $|\psi\rangle$ dengan $\|\psi\| \in R^{in}$, terlihat dengan jelas bahwa vektor $\left|\hat{\psi}\right\rangle$ yang didefinisikan oleh $\left|\hat{\psi}\right\rangle = |\psi\rangle\, \|\psi\|^{-1}$ merupakan vektor yang panjangnya satu satuan. Jadi, vektor $|\psi\rangle$ dengan $\|\psi\| \in R^{in}$ ekivalen dengan vektor satuan. Sebaliknya jika, vektor $|\psi\rangle$ sedemikian rupa sehingga $\|\psi\|$ bukan anggota R^{in} maka vektor $|\psi\rangle$ tidak ekivalen dengan vektor satuan. Pembuktiannya adalah sebagai berikut :
Jika $|\psi\rangle \sim \left|\hat{\psi}\right\rangle$ maka terdapat $\beta \in R^{in}$ sedemikian rupa sehingga $\left|\hat{\psi}\right\rangle = \left|\hat{\psi}\right\rangle \beta$. Selanjutnya, jika $\left|\hat{\psi}\right\rangle = \left|\hat{\psi}\right\rangle \beta$ maka $\left\|\hat{\psi}\beta\right\| = \left\|\psi\beta^{-1}\right\|$ sehingga $\|\psi\| = \beta$.

Andaikan kelas vektor-vektor yang memuat vektor satuan disebut kelas bersatuan, sedangkan kelas vektor-vektor yang tidak memuat vektor bersatuan disebut kelas tak bersatuan. Kelas bersatuan kemungkinan terkait dengan keadaan murni, sedangkan yang tak bersatuan kemungkinan terkait dengan keadaan tak murni. Andaikan $|\psi\rangle$ dan $|\varphi\rangle$ berada di dua kelas bersatuan yang berbeda. Vektor $|\psi\rangle\, \alpha |\, |\varphi\rangle\, \beta$ tidak harus memiliki norma yang invertibel. Oleh karena itu $|\psi\rangle\, \alpha |\, |\varphi\rangle\, \beta$ tidak harus menjadi anggota kelas bersatuan.

Postulat 2 :

Besar-besaran fisis diwakili oleh operator-operator yang ***selfadjoint*** *dan kompak yang bekerja dalam modul M.*

Pengukuran dalam mekanika kuantum adalah pengundian, maka hasil ukur merupakan anggota suatu ruang sampel. Jadi, setiap besaran fisis memiliki sebuah ruang sampel. Karena besaran-besaran fisis diwakili oleh operator-operator yang *selfadjoint* maka ruang sampel bagi sebuah observabel diperoleh dari operator yang mewakili observabel itu. Ruang sampel ini merupakan spektrum operator tersebut yakni himpunan yang beranggotakan swanilai operator yang bersangkutan.

Selanjutnya ditinjau sebuah operator Ω yang *self-adjoint* dan mewakili besaran fisis O. Ruang sampel bagi O tidak lain adalah himpunan $\Sigma(\Omega)$ yang beranggotakan semua skalar ω yang memenuhi persamaan swanilai berikut

$$\hat{\Omega}\,|\psi\rangle = |\psi\rangle\, \omega \tag{13}$$

Dapat dibuktikan dengan mudah bahwa swanilai operator *self-adjoint* tidak harus riil. Berikut adalah pembuktiannya:

$$\hat{\Omega}\,|\psi\rangle = |\psi\rangle\, \omega \tag{14}$$

$$\left\langle \psi|\hat{\Omega}\psi \right\rangle = \langle\psi|\psi\rangle\, \omega \tag{15}$$

$$\left\langle \psi|\hat{\Omega}\psi \right\rangle - \langle\psi|\psi\rangle\, \omega = 0 \tag{16}$$

$$\left\langle \hat{\Omega}^{*}\psi \right| = \omega^{*}\, \langle\psi| \tag{17}$$

$$\left\langle \hat{\Omega} * \psi|\psi \right\rangle = \omega * \langle\psi|\psi\rangle \tag{18}$$

$$\left\langle \hat{\Omega}^{*}\psi|\psi \right\rangle - \omega^{*}\, \langle\psi|\psi\rangle = 0 \tag{19}$$

Karena sifat *self-adjont* $\hat{\Omega} = \hat{\Omega}^{*}$ maka dari persamaan (16) dan (19) jika dikurangkan menjadi

$$\langle\psi|\psi\rangle\, \omega - \omega^{*}\, \langle\psi|\psi\rangle = 0 \tag{20}$$

Persamaan (20) dapat dituliskan

$$\omega = \|\psi\|^{-2}\, \omega^{*}\, \|\psi\|\, 2 \tag{21}$$

Jika $|\psi\rangle$ vektor satuan atau dapat dikatakan $\|\psi\| = 1$, maka persamaan 21 menjadi

$$\omega = \omega^{*} \tag{22}$$

yang berarti swanilai tersebut riil.

Selanjutnya jika dalam persamaan (13), $\|\psi\rangle$ dituliskan $\|\psi\rangle = |\hat{\psi}\rangle\, \|\psi\rangle$ dan disubstitusikan ke persamaan (20).

$$\left\langle \hat{\psi}\|\psi\||\hat{\psi}\|\psi\| \right\rangle \omega - \omega^{*} \left\langle \hat{\psi}\|\psi\||\hat{\psi}\|\psi\| \right\rangle = 0 \tag{23}$$

$$\|\psi\|\langle\hat{\psi}|\hat{\psi}\rangle\|\psi\|\omega - \omega^*\|\psi\|\langle\hat{\psi}|\hat{\psi}\rangle\|\psi\| = 0 \tag{24}$$

$$\|\psi\|^2\omega - \omega^*\|\psi\|^2 = 0 \tag{25}$$

Persamaan (25) tersebut sama dengan persamaan (21).

Pada persamaan swanilai (13), ω disebut swanilai operator Ω milik swavektor $|\psi\rangle$. Jika $|\psi\rangle$ adalah swavektor milik ω maka $|\psi\rangle\beta$ bukanlah swavektor milik ω. Berikut ini adalah pembuktiannya.

$$\hat{\Omega}|\psi\rangle = |\psi\rangle\omega \tag{26}$$

$$\hat{\Omega}|\psi\rangle\beta = |\psi\rangle\omega\beta \tag{27}$$

Jika β invertibel, maka persamaan (27) dapat dituliskan menjadi

$$\hat{\Omega}|\psi\rangle\beta = |\psi\rangle\beta\beta^{-1}\omega\beta \tag{28}$$

Jika $\omega\beta = \beta\omega$ pada persamaan swavektor (27) maka swavektor $|\psi\rangle\beta$ memiliki swanilai ω. Dalam persamaan (28) terlihat jelas bahwa $|\psi\rangle\beta$ memiliki swanilai $\beta^{-1}\omega\beta$ dan $|\psi\rangle\beta$ sekelas dengan $|\psi\rangle$. Sebelumnya telah disepakati bahwa $|\psi\rangle$ dan $|\psi\rangle\beta$ dalam satu kelas ekivalen tetapi dengan swanilai yang berbeda. Dapat dibuktikan bahwa relasi

$$\omega \sim \beta^{-1}\omega\beta \tag{29}$$

dengan β invertibel merupakan relasi ekivalen. Misalkan $\tilde{\Sigma} = \Sigma(\Omega)/\sim$ himpunan yang berangotakan semua kelas ekivalen berhubung relasi ekivalen di atas.

Postulat 3

Ruang sampel bagi pengukuran besaran fisis O adalah himpunan $\tilde{\Sigma}(\Omega)$ yang beranggotakan semua kelas ekivalen swanilai-swanilai.

Ensemble adalah kumpulan suatu sistem yang pada suatu keadaan dan persiapan ini selalu dapat diulang setiap kali selesai mengukur suatu besaran fisis. Situasi ini dapat diganti dengan beberapa sistem fisis identik yang dipersiapkan berada pada keadaan yang sama. Sistem-sistem inilah yang merupa- kan sistem kuantum (ensembel kuantum).

Ensembel kuantum berisi keadaan-keadaan kuantum. Telah dijelaskan sebelumnya bahwa keadaan-keadaan kuantum dalam satu kelas ekivalen. Misalnya sistem kuantum dipersiapkan pada keadaan kuantum yang diwakili oleh $|\psi\rangle = |\hat{\psi}\rangle\beta$ yang merupakan swavektor milik operator selfadjoint $\hat{\Omega}$ yang memiliki swanilai ω. Hasil pengukuran besaran O pada keadaan $|\psi\rangle = |\hat{\psi}\rangle\beta$ merupakan swanilai-swanilai dari operator $\hat{\Omega}$ yakni ω dan $\beta^{-1}\omega\beta$. Hal ini menunjukkan bahwa hasil pengukuran besaran fisis O bukan merupakan salah satu swanilai, melainkan merupakan kelas ekivalen.

Andaikan keadaan kuantum diwakili oleh swavektor $|\psi\rangle\omega$ terkait operator $\hat{\Omega}$ maka berlaku $\hat{\Omega}(|\psi\rangle\omega) = (|\psi\rangle\omega)\omega$. Secara umum, ini menunjukkan bahwa $|\psi\rangle\omega$ merupakan keadaan lain, kecuali jika ω invertibel maka $|\psi\rangle\omega$ dapat mewakili keadaan yang sama.

Postulat 4

Misalkan besaran fisis O diwakili oleh operator $\hat{\Omega}$ dengan swanilai ω dan swavektor $|\psi\rangle = |\hat{\psi}\rangle\beta$. Besaran fisis O diukur pada keadaan yang telah dipersiapkan yang diwakili oleh $|\psi\rangle$. Peluang untuk mendapatkan hasil ukur ω jika sistem berada pada keadaan $|\psi\rangle$ adalah

$$P(|\varphi\rangle, \omega) = \|\langle\hat{\psi}|\varphi\rangle\|^2 \in [0,1] \tag{30}$$

dengan [0,1] adalah subhimpunan di R yang beranggotakan unsur $a \in R$ yang lebih dari atau sama dengan 0 dan kurang dari atau sama dengan 1.

5. Kemungkinan Perumusan Dinamika Kuantum Modular

Perumusan dinamika kuantum modular ini terkendala pada peubah t untuk waktu. Peubah t pada mekanika kuantum biasa merupakan bilangan riil anggota $\mathbb{R}$ dengan watak yang telah biasa dipahami. Untuk memperumum konsep waktu diandaikan peubah waktu merupakan anggota suatu gelanggang waktu $\mathbb{R}_t$ yang disebut gelanggang waktu. Gelanggang waktu ini merupakan gelanggang bernorma dan terurut secara linear *(totally ordered)*.

Gagasan pendefinisian turunan untuk fungsi yang didefinisikan pada gelanggang waktu melalui perumusan konsep turunan fungsi $f : U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di $u_0 \in U$ yang merupakan slope grafik f di titik u_0. Perumuman turunan tersebut diperoleh melalui konsep generator linear sebagai $Df(u_0) = f'(u_0)$ yakni pemetaan linear yang bekerja pada vektor $(u - u_0)$. Dengan kata lain

$g : U \to \mathbb{R}$ $u \mapsto g(u) = f(u_0) + Df(u_0).(u - u_0)$ menyinggung f di titik u_0. Berikut ini definisi untuk perumuman tersebut melalui turunan Fréchet:

Definisi

Andaikan E, F dua modul bertopologi dan U terbuka di E serta dengan pemetaan

$f, g : U \subset E \to F$ f dan g dikatakan tangent di $u_0 \in U$ jika dan hanya jika

$\lim_{u\to u_0} \frac{\|f(u)-g(u)\|}{\|u-u_0\|} = 0$ dengan $||.||$ norma pada modul tersebut.

Teorema: Untuk $f : U \subset E \to F$ dan $u_0 \in E$ dan terdapat paling tidak satu $L \in L(E, F)$ sedemikian rupa sehingga pemetaan $g_L : U \subset E \to F$ yang diberikan oleh $g_L(u) = f(u_0) + L(u - u_0)$ merupakan tangent

f di u_0. Definisi Jika terdapat sebuah $L \in L(E, F)$, f dapat dikatakan dapat diturunkan *(differentiable)* di u_0 dan definisi turunan f di u_0 sebagai $Df(u_0) = L$. Jika f dapat diturunkan untuk setiap titik $u_0 \in U$, pemetaan

$Df : u \to L(E, F)$

$u \mapsto Df(u)$

merupakan turunan f. Jika Df pemetaan kontinyu dapat dikatakan f merupakan kelas C^1 dapat diturunkan secara kontinyu *(continously differentiable)*.

Berdasarkan definisi di atas $E = R_t$ dan $F = M$. Dalam kasus ini dimensi R_t dan M tidak harus sama. Dimensi R_t adalah satu, sedangkan dimensi M dapat berhingga atau tak berhingga.

Andaikan terdapat $L \in L(R_t, M)$ turunan di t dan terdapat pemetaan $f : R_t \subset R_t \to M$. Turunan di t didefinisikan sebagai $Df(t) = A$. Selanjutnya untuk menuju persamaan Schrödinger didefinisikan operator yang uniter. Dalam mekanika kuantum biasa operator translasi waktu $U(t, t_0) = U(t - t_0)$ merupakan operator yang uniter.

Andaikan pada saat t0 keadaan kuantum diwakili oleh $|\psi(t_0)\rangle$. Andaikan keadaan pada saat t mengalami perubahan yang diwakili $|\psi(t)\rangle$ maka hubungannya

$$\hat{U}(t - t_0|\psi(t_0\rangle = |\psi(t)\rangle \tag{31}$$

dengan $U(t, t_0)$ adalah operator uniter. Dalam mekanika kuantum biasa dinamika sistem kuantum dapat diperoleh melalui operator uniter. Kemungkinan besar dari operator uniter inilah dinamika sistem kuantum modular dapat diturunkan. Dalam penelitian ini dinamika mekanika kuantum modular belum dapat diselesaikan karena membutuhkan pemahaman yang lebih mendalam.

Kesimpulan

1 Ruang keadaan kuantum dinyatakan dalam modul Hilbert kanan M di atas gelanggang R yang disertai dengan fitur-fitur yang mungkin untuk membangun mekanika kuantum modular ini: involusi, bernorma, dan unital, serta invertibel.

2 Besaran-besaran fisis diwakili oleh operator- operator yang *self-adjoint* dan kompak yang bekerja pada modul M

3 Ruang sampel bagi pengukuran besaran fisis O merupakan himpunan $\tilde{\Sigma}(\Omega)$ yang beranggotakan semua kelas ekivalen swanilai-swanilai.

4 Besaran fisis O diwakili oleh operator Ω dengan swanilai ω dan swavektor $|\psi\rangle = |\hat{\psi}\beta$. Besaran fisis O diukur pada keadaan yang telah dipersiapkan yang diwakili oleh $|\varphi\rangle$. Peluang untuk mendapatkan hasil ukur ω jika sistem berada pada keadaan $|\varphi\rangle$ adalah
$P(|\psi\rangle, \omega) = ||\langle\hat{\psi}|\varphi\rangle||^2 \in [0, 1]$

5 Dinamika kuantum modular dimulai dengan mendefinisikan gelanggang waktu R_t dan turunannya. Dalam penelitian ini belum dapat diselesaikan karena membutuhkan pemahaman yang lebih mendalam.

Informasi penulis
[1]Jurusan Pendidikan Fisika, Fakultas Teknik Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Indraprasta PGRI, Jalan Nangka No. 58 C, Tanjung Barat, Jagakarsa, 12530 Jakarta Selatan, Indonesia. [2]Jurusan Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Gadjah Mada, Sekip Utara PO BOX BLS 21, 55281 Yogyakarta, Indonesia.

Pustaka

1. Rosyid, M.F.: Mekanika Kuantum Model Matematis Gejala Alam Mikroskopis-Tinjauan Takrelativistik. Jurusan FMIPA UGM, Yogyakarta (2006)
2. Leo, S.D., Abdel-Khalek, K.: Toward an Octonionic World. International Journal of Theoretical Physics **37**(37), 1945–1985 (1998)
3. Leo, S.D., Rotelli, P.: Translation between Quaternion and Complex Quantum Mechanics. Progress of Theoritical Physics **92**(5), 917–926 (1994). DOI 10.1143/ptp/92.5.917
4. Leo, S.D., Scolarici, G.: Right eigenvalue equation in quaternionic quantum mechanics. J. Phys. A : Math. Gen **33**, 2971–2995 (2000)
5. Baez, J.C.: The Octonions. Bulletin of the American Mathematical Society **39**(2)
6. Abraham, R., Marsden, J.E.: Foundation of Mechanics, 2nd edn. Addison-Wesley Publishing Company, Inc. Redwood City, California, ??? (1987)
7. Dray, T., Manogue, C.A.: The octonionic eigenvalue problem. Advances in Applied Cliord Algebras **8**(2), 341–364 (1998)
8. Arbab, A.I.: The Quaternionic Quantum Mechanics. Applied Physics Research **3**(2), 160–170 (2011)
9. Horn, M.E.: Quaternions in University-Level Physics Considering Special Relativity. In: German Physical Society Spring Conference, Leipzig, Germany (2002)
10. Rastall, P.: Quaternions in relativity. Rev. Mod. Phys. **36**(3), 820–832 (1964)
11. Baker, A.: Right eigenvalues for quaternionic matrice: A topological approach. Linear Algebra and Its Application **289**, 303–309 (1999)
12. Leo, S.D., Ducati, G.: Quaternionic eigenvalue problem. Journal of Mathematical Physics **43**, 5815–5829 (2001)
13. Landsman, N.P.: Lecture Note on C*- Algebras, Hilbert C*- Modules, and Quantum Mechanics. Korteweg-de Vries Institute for Mathematics, University of Amsterdam, Plantage Muidergracht 24 (1998). Korteweg-de Vries Institute for Mathematics, University of Amsterdam
14. Lane, S.M., Birkhoff, G.: Algebra, 2nd edn. Macmillan Publishing Co. Inc., USA (1979)
15. Tannoudi, C., B.Diu, Laloë, F.: Quantum Mechanics Volume I. John Wiley and Sons Inc., New York (1977)