

Pemodelan Sistem Kendali PID pada *Quadcopter* dengan Metode Euler Lagrange

Andi Dharmawan¹, Yohana Yulya Simanungkalit^{*2}, Noorma Yulia Megawati³

¹Jurusan Ilmu Komputer dan Elektronika, FMIPA, UGM, Yogyakarta

²Program Studi Elektronika dan Instrumentasi, JIKE, FMIPA, UGM, Yogyakarta

³Jurusan Matematika, FMIPA, UGM, Yogyakarta

e-mail: ¹andi_dharmawan@mail.ugm.ac.id, ²yohanayulya@gmail.com,

³noorma_yulia@yahoo.com

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk membuat dan menghasilkan dasar-dasar pemodelan dari sistem kendali sebuah *quadcopter* dengan metode PID. Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah agar menjadi dasar pembelajaran ataupun sebagai acuan untuk melakukan penelitian sebagai proses pengembangan dari sistem.

Parameter-parameter yang digunakan pada pemodelan ini yaitu massa, panjang lengan, radius, torsi motor, dan kecepatan motor. Beberapa asumsi yang diterapkan dalam melakukan pemodelan dari *quadcopter* ini yaitu, struktur dari *quadcopter* dianggap kaku, struktur dari *quadcopter* dianggap simetris, titik berat beban *quadcopter* diasumsikan berada tepat di tengah (pusat massa) *quadcopter*, dan efek getaran masing-masing propeller dianggap tidak terjadi.

Pengontrol yang dianalisis pada penelitian ini terdapat 4 pengontrol yaitu proporsional controller, proporsional Integral controller, proporsional Derivatif controller, serta proporsional Integral dan Derivatif controller. Pengujian dilakukan sesuai dengan analisis menggunakan matlab untuk mengetahui respon dari masing-masing sistem.

Hasil dari penelitian ini yaitu pemodelan dapat digunakan untuk memprediksi kontrol yang digunakan dan memprediksi konstanta-konstanta dari masing-masing pengontrol. Jika sistem sangat ideal, cukup digunakan pengontrol berupa PD kontrol.

Kata Kunci— Pemodelan, Euler Lagrange, *Quadcopter*, PID, Kendali

Abstract

This study aims to create and produce the basics of modeling a *Quadcopter* control system with PID method. The expected benefits of the research is to be the basis of learning or as a reference for conducting research as a process of development of the system.

The parameters used in this modeling is the mass, arm length, radius, torque motors, and motor speed. Some assumptions are applied in these modeling ie, the structure of the *Quadcopter* considered rigid, the structure of the *Quadcopter* considered symmetric, gravity load *Quadcopter* assumed to be right in the middle (center of mass) *Quadcopter*, and vibration effects of each propeller is considered not happen.

The controller was analyzed in this study there are proportional controllers, Proportional Integral controller, proportional derivative controller, also proportional Integral and Derivative controller. Tests carried out in accordance with the analysis using matlab to determine the response of each system.

Results from this research that modeling can be used to predict and control that is used to predict the constants of each controller. If the system is ideal, just use the controller in the form of PD control.

Keyword— Modelling, Euler Lagrange, *Quadcopter*, PID, Control

1. PENDAHULUAN

Quadcopter adalah salah satu jenis bentuk robot terbang atau pesawat tanpa awak yang bergerak terbang dengan menggunakan gaya dorong yang dihasilkan dari perputaran keempat rotornya. *Quadcopter* dikendalikan dengan menyesuaikan kecepatan sudut yang dihasilkan oleh rotor yang berputar. *Quadcopter* seringkali digunakan untuk beberapa keperluan, diantaranya adalah pengawasan, pencarian dan penyelamatan. Sekarang ini, sudah banyak pihak yang melakukan penelitian mengenai *quadcopter*, baik itu berupa hobi maupun untuk penelitian yang lebih kompleks.

Pada umumnya kegiatan *tuning* yang dilakukan pada sistem kendali PID robot, baik robot darat maupun pesawat tanpa awak masih berupa *tuning* secara manual, yakni mencoba nilai koefisien dari PID mulai dari nilai terendah hingga ditemukan nilai PID dengan respon yang terbaik. Sistem ini awalnya telah digunakan untuk melakukan *tuning* manual pada penelitian tahun 2008 [1] dilakukan penelitian tentang penerapan pengendali Proporsional Integral Derivatif pada robot wall follower berbasis ATMEGA 16 dengan menggunakan sensor Ultrasonik. Pada penelitian tersebut robot mendeteksi api dengan cara telusur dinding (wall follower) menggunakan bantuan sensor jarak (ultrasonik), yaitu saat robot mendeteksi suatu ruangan, robot akan memasuki ruangan tersebut dengan menelusuri seluruh dinding ruangnya.

Sedangkan [2] telah dilakukan *tuning* manual pada pesawat tanpa awak, dimana dilakukan penelitian untuk membuat sebuah *quadcopter* yang dapat terbang dengan cara dikendalikan oleh sebuah pengendali dan seorang pilot. Dalam penelitiannya dibuat sebuah *quadcopter* dengan melakukan *tuning* manual yang bertujuan untuk memantau kadar karbon monoksida yang terdapat di udara. Dalam penelitian ini dilakukan penelitian mengenai suatu cara/alternatif untuk membantu mengetahui kadar gas di tempat-tempat yang tidak dapat dijangkau oleh manusia yang diimplementasikan pada *quadcopter*.

Sedangkan beberapa tahun sebelumnya [3], dilakukan penelitian tentang pemodelan hidrodinamik dan turbulensi pada sebuah "bubble column" menggunakan metode Euler-Lagrange. Pada penelitian ini dibahas mengenai perluasan dan validasi dari pendekatan Euler-Lagrange untuk perhitungan waktu aliran pada sebuah "bubble column". Dengan menggunakan persamaan Euler-Lagrange, pergerakan dari gelembung dihitung dengan cara menyederhanakan persamaan gerak (equation of motion) kedalam gaya gesek, inersia dari cairan, grafitasi serta parameter-parameter lain yang mempengaruhi pergerakan gelembung tersebut. Dari penelitian tersebut, hasil pemodelan dapat mengurangi tingkat kesalahan dari eksperimen secara manual.

Pada tahun 2011 [4] dilakukan penelitian tentang pemodelan sebuah *quadcopter*. Dalam melakukan pemodelan digunakan metode Newton-Euler yaitu metode dengan cara menganalisis gaya-gaya yang terdapat pada *quadcopter*. Perilaku model yang dihasilkan dari persamaan-persamaan yang dihasilkan dari metode tersebut kemudian diperiksa dengan mensimulasikan model tersebut. Stabilisasi dari model *quadcopter* tersebut dilakukan dengan cara memanfaatkan pengontrol Proporsional Derivatif.

Melihat perkembangan tersebut, dibuatlah sebuah pemodelan sistem kendali PID pada *quadcopter* dengan menggunakan metode Euler-Lagrange. Dengan demikian diharapkan kedepannya sistem ini dapat dikembangkan lebih lanjut sehingga dapat membantu untuk mendapatkan nilai PID tanpa harus melakukan *tuning* manual. Sehingga sistem ini diharapkan dapat menyelesaikan masalah yang berupa bagaimana membuat sebuah pemodelan sistem kendali PID pada sebuah *quadcopter* dengan menggunakan metode Euler Lagrange.

2. PEMODELAN QUADCOPTER

Quadcopter sebagaimana sering disebut juga quadrotor merupakan helikopter dengan empat buah rotor. Rotor tersebut digunakan untuk mengangkat *quadcopter* agar bisa terbang dan rotor tersebut ditempatkan pada keempat buah sisi *quadcopter* dengan jarak dari titik tengah

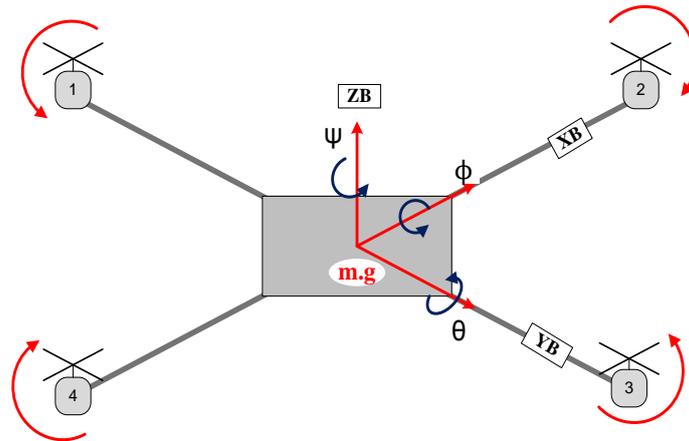
sudah ditentukan sesuai dengan beberapa pertimbangan.

Untuk dapat melakukan pemodelan dari *quadcopter* dapat dilakukan dengan cara mengasumsikan beberapa parameter yaitu:

- Struktur dari *quadcopter* dianggap kaku
- Struktur dari *quadcopter* dianggap simetris
- Titik berat beban *quadcopter* diasumsikan berada tepat di tengah (pusat massa) *quadcopter*.

- Efek getaran masing-masing propeller dianggap tidak terjadi
- Efek aerodinamis dianggap tidak mempengaruhi *quadcopter*.

Gerak yang terjadi pada sebuah *quadcopter* pada umumnya digambarkan dengan sumbu-sumbu yang terbentuk pada sebuah *quadcopter*, seperti yang terlihat pada gambar 1.

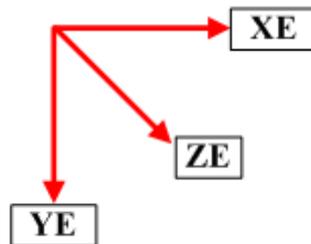


Gambar 1 Konfigurasi *quadcopter* B-frame terhadap E-frame

Gerak *quadcopter* terhadap sumbu bumi bekerja pada sumbu yang terdapat pada rangka *quadcopter*, yaitu sumbu bumi x, y dan z dan sudut roll (ϕ), pitch (θ) dan yaw (ψ). Yang berhubungan dengan ketinggian pada sebuah *quadcopter* adalah sudut roll (ϕ), pitch (θ) dan yaw (ψ), dimana sudut roll (ϕ) merupakan sudut yang bekerja pada sumbu x, sudut pitch (θ) merupakan sudut yang bekerja pada sumbu y, dan yaw (ψ) merupakan sudut yang bekerja pada sumbu z.

2.1. Referensi frame (frame reference) *quadcopter*

E-Frame merupakan nilai acuan yang akan digunakan dimana XE merupakan representasi dari arah utara bumi, dan YE merupakan representasi dari arah barat bumi serta ZE merupakan arah dari pusat bumi. Frame ini digunakan untuk mendefinisikan posisi linear dari sebuah *quadcopter* serta posisi sudut dari sebuah *quadcopter* tersebut. Gambar 2 menggambarkan E-frame pada *quadcopter*.



Gambar 2 E-Frame

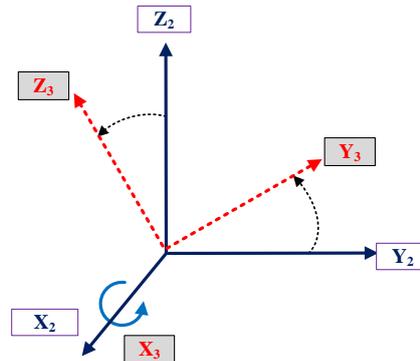
B-Frame merupakan frame dari rangka *quadcopter*. XB merupakan sumbu x dari *quadcopter*, YB merupakan sumbu y dari *quadcopter*, dan ZB merupakan sumbu z dari

quadcopter.

Matriks rotasi dari sebuah *quadcopter* didapatkan dengan cara mengalikan tiga buah matriks rotasi yang terdapat pada *quadcopter*. Berdasarkan [5] dengan menggunakan kaedah kangan kangan terdapat tiga buah rotasi pada *quadcopter* yaitu:

a. Rotasi sepanjang sumbu x

Rotasi sepanjang sumbu x dilambangkan dengan $R(\phi, x)$ yang merupakan rotasi *quadcopter* sepanjang sumbu x menghasilkan sudut yang diberi nama sudut roll. Rotasi tersebut direpresentasikan dengan Gambar 3.



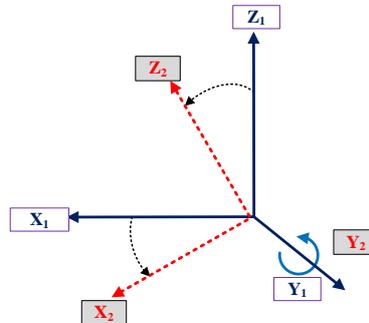
Gambar 3 Rotasi pada sumbu x

Adapun matriks rotasi pada sumbu x ditunjukkan pada persamaan (1)

$$R(\phi, x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (1)$$

b. Rotasi sepanjang sumbu y

Rotasi sepanjang sumbu y dilambangkan dengan $R(\theta, y)$ yang merupakan rotasi *quadcopter* sepanjang sumbu x menghasilkan sudut yang diberi nama sudut pitch. Rotasi tersebut direpresentasikan dengan Gambar 4.



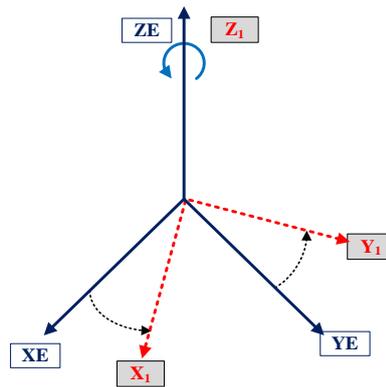
Gambar 4 Rotasi pada sumbu y

Adapun matriks rotasi pada sumbu y ditunjukkan pada persamaan (2)

$$R(\theta, y) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2)$$

c. Rotasi sepanjang sumbu z

Rotasi sepanjang sumbu y dilambangkan dengan $R(\psi, z)$ yang merupakan rotasi *quadcopter* sepanjang sumbu x menghasilkan sudut yang diberi nama sudut yaw. Rotasi tersebut direpresentasikan dengan Gambar 5.



Gambar 5 Rotasi pada sumbu z

Adapun matrik rotasi pada sumbu y ditunjukkan pada persamaan (3)

$$R(\psi, z) = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Dari persamaan-persamaan tersebut diatas maka akan didapatkan nilai matriks rotasi untuk sebuah *quadcopter* dari B-Frame terhadap E-Frame dengan cara:

$$R = R(\psi, z) \cdot R(\theta, y) \cdot R(\phi, x) \quad (4)$$

$$R = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta & -\sin \psi \cos \phi + \cos \psi \sin \theta \sin \phi & \sin \psi \sin \theta + \cos \psi \sin \theta \cos \phi \\ \sin \psi \cos \theta & \cos \psi \cos \phi + \sin \psi \sin \theta \sin \phi & -\cos \psi \sin \phi + \sin \psi \sin \theta \cos \phi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} \quad (5)$$

Quadcopter diasumsikan memiliki struktur yang simetris dari keempat lengan *quadcopter* dan berada pada sumbu x dan sumbu y. Dengan demikian matriks inersia dari *quadcopter* adalah matriks diagonal I dimana $I_{xx} = I_{yy}$ yang ditunjukkan pada persamaan (6).

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Transformasi matriks digunakan untuk mentransformasi matriks kecepatan angular (p, q, r) ke kecepatan sudut (ϕ, θ, ψ) , yang ditunjukkan pada persamaan (7).

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = R_r \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Dimana :

$$R_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \cos \theta \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \quad (8)$$

2.2. Kinematika

Kinematika adalah cabang ilmu dari mekanika yang membahas gerakan tanpa mempersoalkan gaya yang menyebabkannya. Dari persamaan (7) didapat pergerakan *quadcopter* dengan cara mengalikan matriks tersebut dengan $[x, y, z]^T$ di dapat persamaan:

$$rX, Y, Z = R \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (9)$$

Setelah diuraikan, persamaan (9) menjadi:

$$rX(x, y, z) = (\cos \psi \cos \theta)x + (\cos \psi \sin \theta \sin \phi - \sin \psi \cos \phi)y + (\sin \psi + \cos \sin \theta \psi \sin \theta \cos \phi)z \quad (10)$$

$$rY(x, y, z) = (\sin \psi \cos \theta)x + (\sin \psi \sin \theta \sin \phi + \cos \psi \cos \phi)y + (\sin \psi \sin \theta \cos \phi - \cos \psi \sin \phi)z \quad (11)$$

$$rZ = (-\sin \theta)x + (\cos \theta \sin \phi)y + (\cos \theta \cos \phi)z \quad (12)$$

Dengan melakukan diferensiasi kita mendapatkan kecepatan linier dari *quadcopter*. Setelah diturunkan persamaan (10) – (12) menjadi:

$$\begin{aligned} VX(x, y, z) = & (-\sin \theta \cos \psi \dot{\theta} - \cos \theta \sin \psi \dot{\psi})x \\ & + (-\cos \psi \cos \phi \dot{\psi} + \sin \psi \sin \phi \dot{\phi} - \sin \psi \sin \phi \sin \theta \dot{\psi} + \cos \psi \cos \phi \sin \theta \dot{\phi} \\ & + \cos \psi \sin \phi \cos \theta \dot{\theta})y \\ & + (\cos \psi \sin \phi \dot{\psi} + \sin \psi \cos \phi \dot{\phi} - \sin \psi \cos \phi \sin \theta \dot{\psi} - \cos \psi \sin \phi \sin \theta \dot{\phi} \\ & + \cos \psi \cos \phi \cos \theta \dot{\theta})z \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} VY(x, y, z) = & (-\sin \theta \sin \psi \dot{\theta} + \cos \theta \cos \psi \dot{\psi})x \\ & + (-\sin \psi \cos \phi \dot{\psi} - \cos \psi \sin \phi \dot{\phi} + \cos \psi \sin \phi \sin \theta \dot{\psi} + \sin \psi \cos \phi \sin \theta \dot{\phi} \\ & + \sin \psi \sin \phi \cos \theta \dot{\theta})y \\ & + (\sin \psi \sin \phi \dot{\psi} - \cos \psi \cos \phi \dot{\phi} + \cos \psi \cos \phi \sin \theta \dot{\psi} - \sin \psi \sin \phi \sin \theta \dot{\phi} \\ & + \sin \psi \cos \phi \cos \theta \dot{\theta})z \end{aligned} \quad (14)$$

$$VZ(x, y, z) = (-\cos \theta \dot{\theta})x + (\cos \phi \cos \theta \dot{\phi} - \sin \phi \sin \theta \dot{\theta})y + (-\sin \phi \cos \theta \dot{\phi} - \cos \phi \sin \theta \dot{\theta})z \quad (15)$$

Untuk mendapatkan kecepatan yang digunakan pada pencarian energi kinetik yang dimiliki *quadcopter*, maka kecepatan yang dimiliki oleh masing-masing sumbu dikuadratkan terlebih dahulu kemudian dijumlahkan dari ketiga sumbu x, sumbu y dan sumbu z seperti yang ditunjukkan pada persamaan (16), sehingga diperoleh persamaan (17).

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 \quad (16)$$

$$\begin{aligned} V^2 = & (y^2 + z^2)(\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \dot{\phi} \dot{\psi} + \dot{\phi}^2) \\ & + (x^2 + z^2)(\dot{\psi}^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta + 2 \sin \phi \cos \phi \cos \theta \dot{\theta} \dot{\psi} + \cos^2 \phi \dot{\theta}^2) \\ & + (x^2 + y^2)(\dot{\psi}^2 \cos^2 \phi - 2 \sin \phi \cos \phi \cos \theta \dot{\theta} \dot{\psi} + \sin^2 \phi \dot{\theta}^2) \\ & + 2xy(\dot{\psi}^2 \sin \phi \sin \theta \cos \theta + \dot{\psi}(\cos \phi \sin \theta \dot{\theta} - \sin \phi \cos \theta \dot{\phi}) \\ & - \cos \phi \dot{\phi} \dot{\theta}) + 2xz(\dot{\psi}^2 \cos \phi \sin \theta \cos \theta \\ & + \dot{\psi}(-\cos \phi \cos \theta \dot{\phi} - \sin \phi \sin \theta \dot{\theta}) \\ & + \sin \phi \dot{\phi} \dot{\theta}) + 2yx(-\dot{\psi}^2 \sin \phi \cos \phi \cos^2 \theta \\ & + \dot{\psi}(\sin^2 \phi \cos \theta \dot{\theta} - \cos^2 \phi \cos \theta \dot{\theta}) + \sin \phi \cos \phi \dot{\theta}^2) \end{aligned} \quad (17)$$

2.3. Energi

Energi kinetik atau biasa disebut energi kinetis adalah energi dari suatu benda yang dimiliki karena pengaruh gerakannya. Benda yang bergerak memiliki gerak. Secara umum persamaan energi kinetik ditunjukkan pada persamaan (18).

$$Ek = \frac{1}{2}mv^2 \quad (18)$$

dimana :

E_k = Energi kinetik (joule)

m = masa benda (kg)

v = kecepatan benda (m/s)

Jika suatu benda berputar melalui titik pusat massa suatu benda, maka benda tersebut memiliki energi kinetik rotasi yang merupakan penjumlahan seluruh energi kinetik yang dihasilkan dari bagian-bagian benda yang bergerak yang sesuai dengan persamaan (19) (Tipler, 2011).

$$\frac{1}{2} \int (r\omega)^2 dm \quad (19)$$

Dengan menggunakan persamaan diatas dan menggunakan kecepatan pada persamaan (17) maka persamaan energi kinetik *quadcopter* yang dilambangkan dengan (T) menjadi:

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} \int y^2 + z^2 (R) dm(r). (\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \dot{\phi} \dot{\psi} + \dot{\phi}^2) \\ & + \frac{1}{2} \int z^2 + x^2 (R) dm(r). (\dot{\psi}^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta + 2 \sin \phi \cos \phi \cos \theta \dot{\theta} \dot{\psi} \\ & + \cos^2 \phi \dot{\theta}^2) \\ & + \frac{1}{2} \int x^2 + y^2 (R) dm(r). (\dot{\psi}^2 \cos^2 \phi - 2 \sin \phi \cos \phi \cos \theta \dot{\theta} \dot{\psi} \\ & + \sin^2 \phi \dot{\theta}^2) \\ & + \int xy (R) dm(r). (\psi^2 \sin \phi \sin \theta \cos \theta \\ & + \dot{\psi} (\cos \phi \sin \theta \dot{\theta} - \sin \phi \cos \theta \dot{\phi}) - \cos \phi \dot{\phi} \dot{\theta}) \\ & + \int xz (R) dm(r). (\psi^2 \cos \phi \sin \theta \cos \theta \\ & + \dot{\psi} (-\cos \phi \cos \theta \dot{\phi} - \sin \phi \sin \theta \dot{\theta}) \\ & + \sin \phi \dot{\phi} \dot{\theta}) + \int yz (R) dm(r). (-\dot{\psi}^2 \sin \phi \cos \phi \cos^2 \theta \\ & + \dot{\psi} (\sin^2 \phi \cos \theta \dot{\theta} - \cos^2 \phi \cos \theta \dot{\theta}) + \sin \phi \cos \phi \dot{\theta}^2) \end{aligned} \quad (20)$$

Dalam penelitian ini, *quadcopter* diasumsikan memiliki bentuk yang simetris antara keempat lengan *quadcopter* sehingga momen inersia dari *quadcopter* merupakan diagonal matrik dari I dengan demikian jika $\int r^2 dm = I$ persamaan diatas dapat diubah menjadi:

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} I_{xx} (\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \dot{\phi} \dot{\psi} + \dot{\phi}^2) \\ & + \frac{1}{2} I_{yy} (\dot{\psi}^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta + 2 \sin \phi \cos \phi \cos \theta \dot{\theta} \dot{\psi} + \cos^2 \phi \dot{\theta}^2) \\ & + \frac{1}{2} I_{zz} (\dot{\psi}^2 \cos^2 \phi \cos^2 \theta - 2 \sin \phi \cos \phi \cos \theta \dot{\theta} \dot{\psi} + \sin^2 \phi \dot{\theta}^2) \end{aligned} \quad (21)$$

Energi potensial adalah energi yang dimiliki suatu benda akibat adanya pengaruh

tempat kedudukan dari benda tersebut. Energi potensial disebut juga energi diam karena benda yang dalam keadaan diam dapat memiliki energi. Jika benda bergerak maka benda tersebut mengalami perubahan energi potensial menjadi energi gerak. Persamaan energi potensial ditunjukkan pada persamaan (22).

$$E_p = mgh \quad (22)$$

Seperti halnya energi kinetik, energi potensial pada benda yang berotasi juga merupakan penjumlahan dari energi potensial dari bagian-bagian benda tersebut. Oleh sebab itu persamaan energi potensial pada *quadcopter* ditunjukkan pada persamaan (24) [2]

$$V = g \int (-\sin\theta \cdot x + \sin\phi \cos\theta \cdot y + \cos\phi \cos\theta \cdot z) dm \cdot (r) \quad (23)$$

$$V = \int x dm(x) \cdot (-g \sin\theta) + \int y dm(y) \cdot (g \sin\phi \cos\theta) + \int z dm(z) \cdot (g \cos\phi \cos\theta) \quad (24)$$

2.4. Persamaan gerak *quadcopter*

Untuk menentukan dinamika gerak dari *quadcopter* salah satu caranya adalah dengan menggunakan persamaan Lagrange. Persamaan Lagrange adalah persamaan gerak suatu benda yang dinyatakan dengan cara meninjau energi kinetik dan energi potensial dari benda tanpa perlu meninjau gaya yang bekerja pada benda tersebut. Secara umum persamaan Lagrange ditunjukkan pada persamaan (25)

$$L = T - V \quad (25)$$

Dimana:

L : Lagrangian

T : Energi Kinetik rotasi benda berputar

V : Energi potensial rotasi benda berputar

Dimana T adalah energi kinetik dan V adalah energi potensial. Dengan menggunakan energi kinetik pada persamaan (21) dan energi potensial pada persamaan (24) kemudian dilakukan turunan parsial terhadap persamaan tersebut untuk mendapatkan persamaan gerak benda pada suatu sistem maka diperoleh persamaan:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = \tau \phi \quad (26)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \tau \theta \quad (27)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \psi} = \tau \psi \quad (28)$$

Persamaan (26) – (28) masing-masing dapat disederhanakan menggunakan persamaan kecepatan dan percepatan yang dihasilkan dari persamaan transformasi matriks yang telah dijelaskan sebelumnya.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} &= \ddot{\phi} \cdot I_{xx} - \dot{\psi} \cdot \sin\theta \cdot I_{xx} - \dot{\psi} \dot{\theta} \cdot \cos\theta \left(I_{xx} + (I_{yy} - I_{zz})(2\cos\phi^2 - 1) \right) \\ &+ \dot{\theta}^2 \cdot \frac{1}{2} \sin 2\phi (I_{yy} - I_{zz}) - \dot{\psi}^2 \cdot \frac{1}{2} \sin 2\phi \cos^2\theta ((I_{yy} - I_{zz})) \\ &+ \int y dm(y) \cdot (g \cos\phi \cos\theta) + \int z dm(z) \cdot (g \sin\phi \cos\theta) \end{aligned} \quad (29)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \ddot{\theta} \cdot (I_{yy} \cos^2 \phi + I_{zz} \sin^2 \phi) + \dot{\psi} \cdot \frac{1}{2} \sin 2\phi \cos \theta \cdot (I_{yy} - I_{zz}) + \psi^2 \cdot \frac{1}{2} \sin 2\theta (-I_{xx} \quad (30)$$

$$+ I_{yy} \sin^2 \phi + I_{zz} \cos^2 \phi) + \dot{\theta} \dot{\phi} \cdot \sin 2\phi (I_{zz} - I_{yy}) \\ + \dot{\psi} \dot{\phi} \cdot \cos \theta (\cos 2\phi \cdot (I_{yy} - I_{zz}) + I_{xx}) + \int x dm(x) \cdot (-g \cos \theta) \\ - \int y dm(y) \cdot (g \sin \phi \sin \theta) - \int z dm(z) \cdot (g \cos \phi \sin \theta)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \psi} = \ddot{\psi} \cdot (\cos^2 \theta (I_{zz} \cos^2 \phi + I_{yy} \sin^2 \phi) + \sin^2 \theta I_{xx}) - \dot{\phi} \cdot \sin \theta I_{xx} \quad (31)$$

$$+ \ddot{\theta} \cdot \frac{1}{2} \sin 2\phi \cos \theta (I_{yy} - I_{zz}) + \dot{\theta} \dot{\psi} \cdot \sin 2\theta (I_{xx} - I_{zz} \cos^2 \phi + I_{yy} \sin^2 \phi) \\ - \dot{\psi} \dot{\phi} \cdot \sin 2\phi \cos^2 \theta (I_{yy} - I_{zz}) + \dot{\theta} \dot{\phi} \cdot \cos \theta (I_{xx} + (2 \cos^2 \phi - 1)(I_{yy} - I_{zz})) \\ - \dot{\theta}^2 \cdot \frac{1}{2} \sin 2\phi \sin \theta (I_{yy} - I_{zz})$$

Persamaan (29) – (31) dapat disederhanakan menggunakan persamaan kecepatan dan percepatan yang sebelumnya didapatkan dari persamaan rotasi matriks yang telah dijelaskan sebelumnya.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = I_{xx} \dot{\omega}_x - (I_{yy} - I_{zz}) \dot{\omega}_y + \int y dm(y) \cdot (-g \cos \phi \cos \theta) + \int z dm(z) \cdot (g \sin \phi \cos \theta) \quad (32)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\sin \phi (\dot{\omega}_z I_{zz} - \omega_x \omega_y (I_{xx} - I_{yy})) + \cos \phi (\dot{\omega}_y I_{yy} - \omega_x \omega_z (I_{zz} - I_{xx})) \quad (33)$$

$$+ \int x dm(x) \cdot (-g \cos \theta) - \int y dm(y) \cdot (g \sin \phi \sin \theta) - \int z dm(z) \cdot (g \cos \phi \sin \theta)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \psi} = -\sin \theta \cdot (\dot{\omega}_x I_{xx} - \omega_y \omega_z (I_{yy} - I_{zz})) + \sin \phi \cos \theta \cdot (\dot{\omega}_y I_{yy} - \omega_z \omega_x (I_{zz} - I_{xx})) \quad (34)$$

$$+ \cos \phi \cos \theta \cdot (\dot{\omega}_z I_{zz} - \omega_x \omega_y (I_{zz} - I_{xx}))$$

3. DINAMIKA QUADCOPTER

Model dinamika *quadcopter* didefinisikan sebagai pergerakan rotasi masing-masing sumbu yaitu roll, pitch dan yaw serta dari efek giroskopik yang merupakan resultan efek-efek giroskopik pada kerangka *quadcopter* yang dianggap kaku (rigid). Jika diterapkan percepatan sudut *quadcopter* sangat kecil maka persamaan dinamik *quadcopter* menjadi.

$$I_{xx} \ddot{\phi} = \dot{\theta} \dot{\psi} (I_{yy} - I_{zz}) - J_r \dot{\theta} \Omega_r + \tau_x \quad (35)$$

$$I_{yy} \ddot{\theta} = \dot{\phi} \dot{\psi} (I_{zz} - I_{xx}) - J_r \dot{\phi} \Omega_r + \tau_y \quad (36)$$

$$I_{zz} \ddot{\psi} = \dot{\theta} \dot{\phi} (I_{xx} - I_{yy}) + \tau_z \quad (37)$$

4. FUNGSI TRANSFER QUADCOPTER

Karena posisi *quadcopter* dipengaruhi oleh 2 buah motor pada masing-masing lengan maka persamaan fungsi alih dari *quadcopter* secara umum adalah:

$$\phi(s) = \frac{B^2 bl}{I_{xx} s^2 (s+A)^2} (u_4^2(s) - u_2^2(s)) \quad (38)$$

$$\theta(s) = \frac{B^2 bl}{I_{yy} s^2 (S+A)^2} (u_3^2(s) - u_1^2(s)) \quad (39)$$

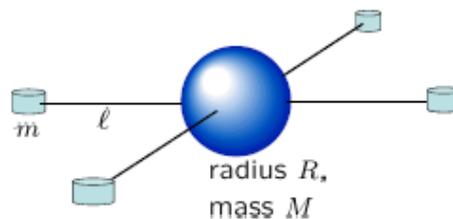
$$\psi(s) = \frac{B^2 d}{I_{zz} s^2 (S+A)^2} \sum_{i=4}^4 (-1)^{i+1} u_i^2(s) \quad (40)$$

Dimana:

ϕ	: Sumbu <i>roll</i>
θ	: Sumbu <i>pitch</i>
ψ	: Sumbu <i>yaw</i>
I_{xx}	: Momen inersia pada sumbu x
I_{yy}	: Momen inersia pada sumbu y
I_{zz}	: Momen inersia pada sumbu z
u	: Masukan motor <i>brushless</i>
J_r	: Momen inersia rotor
b	: Faktor daya angkat
d	: Faktor gaya gesek
l	: Panjang lengan
Ω	: Kecepatan angular proppeler
J_m	: Inersia motor

5. MOMEN INERSIA PADA QUADCOPTER

Moment inersia merupakan ukuran kelembaman suatu benda terhadap perubahan kedudukan atau posisi dalam gerak rotasi. Ada beberapa variabel yang menentukan inersia dari *quadcopter*, diantaranya massa, panjang lengan dan beberapa variabel lainnya yang ditunjukkan oleh ilustrasi Gambar 6.



Gambar 6 Ilustrasi *quadcopter*

Dari ilustrasi tersebut momen inersia *quadcopter* adalah sebagai berikut:

$$I_{xx} = \frac{2MR^2}{5} + 2l^2m \quad (41)$$

$$I_{yy} = \frac{2MR^2}{5} + 2l^2m \quad (42)$$

$$I_{zz} = \frac{2MR^2}{5} + 4l^2m \quad (43)$$

```

1. % Ixx = momen inersia sumbu x (kg.m2)
2. % Iyy = momen inersia sumbu y (kg.m2)
3. % Izz = momen inersia sumbu Z (kg.m2)
4. % l= panjang lengan quadcopter (m)
5. % R = radius tengah quadcopter (m)
6. % m = massa motor (kg)
7. % M = massa total quadcopter minus motor (kg)
8.     m= 0.078;
9.     R =0.15;
10. M =0.938;
11. l=0.27;
12. Ixx= (2*M*R*R/5)+(2*l*l*m);
13. Iyy= (2*M*R*R/5)+(2*l*l*m);
14. Izz= (2*M*R*R/5)+(4*l*l*m);
15. Ixx
16. Iyy
17. Izz

```

Gambar 7 Kode program momen inersia

Perintah pada baris 15 sampai 16 adalah perintah untuk mengetahui hasil perhitungan I_{xx} , I_{yy} dan I_{zz} dan hasilnya masing-masing adalah 0.0198, 0.0198 dan 0.0312. Dengan menggunakan momen inersia tersebut dan beberapa parameter dan dilakukan perhitungan maka persamaan transfer fungsi diatas menjadi:

$$\phi(s) = \frac{0.0131}{8,5268e - 17s^4 + 1,2582e - 10s^3 + 4,6416e - 5s^2} U_2 \quad (44)$$

$$\theta(s) = \frac{0.0131}{8,5268e - 17s^4 + 1,2582e - 10s^3 + 4,6416e - 5s^2} U_3 \quad (45)$$

$$\psi(s) = \frac{0,0484}{1,3421e - 16s^4 + 1,9804e - 10s^3 + 7,3057e - 5s^2} U_4 \quad (46)$$

6. KESIMPULAN

Dari penelitian yang dilakukan diperoleh kesimpulan sebagai berikut :

1. Telah berhasil dibuat pemodelan sistem kendali PID pada *quadcopter* menggunakan metode euler-lagrange pada sebuah *quadcopter* yang ideal, dimana tidak dipengaruhi oleh efek aerodinamis dan efek giroskopik.
2. Jika sistem dianggap sangat ideal, maka berapapun nilai konstanta integral yang ditambahkan maka tidak akan memberikan pengaruh pada pemodelan sistem, sehingga dapat disimpulkan bahwa untuk pemodelan sistem yang dianggap ideal cukup menggunakan pengontrol PD saja.

7. SARAN

Dari penelitian yang dilakukan diperoleh pula saran bahwa perlu dilakukan penelitian pemodelan dengan metode lainnya supaya hasilnya dapat dibandingkan dengan metode *euler lagrange*.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] I. Ardianti, “Penerapan Pengendali Proporsional Integral Derivatif pada Robot Wall Follower Berbasis ATMEGA 16 dengan Menggunakan Sensor Ultrasonik,” Universitas Gadjah Mada, 2008.
- [2] A. A. Saputra, “Rancang Bangun Quadcopter Untuk Monitoring Kadar Karbon Monoksida,” Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta, Indonesia, 2012.
- [3] S. Laín, D. Bröder, M. Sommerfeld, and M. F. Göza, “Modelling hydrodynamics and turbulence in a bubble column using the Euler – Lagrange procedure,” *Int. J. Multiph. Flow*, vol. 28, no. 8, pp. 1381–1407, 2002.
- [4] T. Luukkonen, “Modelling and control of quadcopter,” Espoo, Finlandia, 2011.
- [5] S. Bouabdallah, A. Noth, and R. Siegwart, “PID vs LQ control techniques applied to an indoor micro quadrotor,” in *2004 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS) (IEEE Cat. No.04CH37566)*, 2004, vol. 3, pp. 2451–2456.