FUNGTORIALITAS PADA ALJABAR INSIDENSI BERHINGGA

Ema Carnia[1], Sri Wahyuni[2], Irawati[3], Setiadji[2] dan Zhao Dongsheng[4]

[1]Jurusan Matematika FMIPA UNPAD (mahasiswa S3 Matematika UGM)
ema_carnia@yahoo.com
[2]Jurusan Matematika FMIPA UGM
swahyuni@ugm.ac.id
[3]KK Aljabar Matematika FMIPA -ITB
[4]Mathematics and Mathematics Education Department, NIE, NTU Singapore

ABSTRAK

Aljabar insidensi pada umumnya didefinisikan pada poset berhingga lokal, sekarang akan didefinisikan pada sembarang poset yang dikenal sebagai aljabar insidensi berhingga. Dalam tulisan ini akan ditunjukkan eksistensi fungtor kovarian dari kategori poset ke kategori aljabar insidensi berhingga.

Kata –kata kunci: poset berhingga lokal, fungtor, aljabar insidensi berhingga.

ABSTRACT

Incidence algebra generally defined on locally finite poset, now we will define on arbitrary poset known as the finitary incidence algebra. In this paper we will show the existence of covariant functor from the category of Poset to the category of finitary incidence algebra.

Keywords : Locally Finite Poset, Functor, Finitary Incidence Algebra.

1. Pendahuluan

Aljabar insidensi berhingga dapat dipandang sebagai perumuman dari aljabar insidensi yang biasa didefinisikan pada suatu poset yang bersifat berhingga lokal (locally finite). Melihat karakteristik aljabar insidensi yang mensyaratkan keterhinggaan maka dengan ide tersebut dibuatlah aljabar insidensi berhingga yang didefinisikan pada sembarang poset, namun tetap mempertahankan keterhinggaannya dengan melihat subintervalnya yang nilai fungsinya tidak sama dengan nol.

Penelitian terakhir untuk topik aljabar insidensi bekerja pada poset berhingga lokal dan lapangan, yaitu pembentukan aljabar atas lapangan yang berisi fungsi-fungsi yang mengaitkan interval poset pada lapangannya [Stanley, 2006]. Selanjutnya dengan tetap menggunakan poset berhingga lokal namun mengganti lapangan menjadi ring komutatif, maka dapat ditinjau sifat-sifat aljabar insidensi suatu poset atas ring komutatif [Spiegel,2007]. Kemudian setelah itu dilanjutkan dengan pendefinisian himpunan deret hingga jumlahan formal dari interval poset yang bekerja pada lapangan dan poset sembarang (tidak harus berhingga lokal) [Khripchenko,2008]. Dalam tulisan ini, aljabar insidensi berhingga didefinisikan pada sembarang poset dan bekerja pada ring komutatif.

Dalam kaitannya dengan kategori dan fungtor, telah diperoleh adanya fungtor kontravarian dari kategori poset berhingga lokal ke kategori aljabar dengan membatasi domainnya pada sub kategori poset yang tidak full, yaitu pada kompleks simplisial [Zapatrin,2006]. Kaitan antara poset dan kompleks simplisial diteliti dengan melihat fungtornya dan diperoleh eksistensi fungtor kovarian dari kategori poset ke kategori kompleks simplisial, dan dengan menggunakan komposisi fungtor didapat fungtor kontravarian dari kategori poset ke kategori aljabar [Carnia,2007].

Dengan mengacu pada hasil sebelumnya, yaitu adanya fungtor kontravarian dari kategori poset berhingga lokal ke kategori aljabar, akan diperiksa apakah hasil yang sama akan diperoleh jika diterapkan di kategori poset sembarang dan kategori aljabar insidensi berhingga.

Berdasarkan uraian di atas, maka yang menjadi tujuan pada penulisan paper ini adalah untuk menunjukkan eksistensi fungtor dari kategori poset ke kategori Aljabar, khususnya Aljabar insidensi berhingga pada sembarang poset dan bekerja pada ring komutatif.

Secara eksplisit, permasalahan utama dapat disajikan sebagai berikut :

Misalkan P , Q masing-masing sembarang poset dan R adalah ring komutatif dengan satuan . Misalkan pula *FININC(P,R)* adalah aljabar insidensi berhingga dari poset P atas ring komutatif R.

Jika $h : P \rightarrow Q$ merupakan pemetaan monoton dari poset P ke poset Q dan untuk setiap f di *FININC(P,R)* pemetaan $G(f) : QxQ \rightarrow R$ memenuhi $G(f)(h(a),h(b)) = f(a,b)$ dan $G(f)(q,q)=1$ maka akan diselidiki jenis fungtor yang terbentuk.

2. Tinjauan Teori

Sebelum masuk pada pembahasan utama, yaitu tentang fungtorialitas aljabar insidensi berhingga, terlebih dahulu akan diuraikan pengertian tentang kategori dan fungtor yang diambil dari [Awodey,2006] dan [Anderson,1992], serta aljabar insidensi berhingga atas lapangan yang berhubungan erat dengan bahasan utama.

2.1 Kategori dan Fungtor

Fungtor yang mengaitkan dua buah kategori merupakan sesuatu yang bisa kita pandang sebagai suatu pemetaan atau dengan kata lain fungtor adalah sesuatu yang dapat dipandang sebagai ”homomorfisma dari kategori”.

Misalkan X adalah kelas, untuk setiap $A,B \in X$ misalkan $mor_C\ (A,B)$ adalah sebuah himpunan yang elemen-elemennya disebut “panah” $f: A \rightarrow B$ dengan domain A dan kodomain B. Selanjutnya misalkan untuk setiap tripel A,B,C di X terdapat sebuah fungsi $\circ$: $mor_C\ (B,C)$ x $mor_C\ (A,B) \rightarrow mor_C\ (A,C)$, panah yang mengaitkan pasangan $g: B \rightarrow C$ dan $f: A \rightarrow B$ dinotasikan $g \circ f: A \rightarrow C$. Selanjutnya pengertian kategori secara formal didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.1.1

Sebuah sistem C =(X, mor_C,$\circ$) yang memuat kelas X, pemetaan $mor_C : (A,B) \circ mor_C\ (A,B)$ dan aturan $\circ$ adalah sebuah kategori jika memenuhi :

(i) Untuk setiap tripel $h: C \rightarrow D$, $g: B \rightarrow C$ dan $f: A \rightarrow B$ berlaku $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

(ii) Untuk setiap $A \in X$, terdapat dengan tunggal $1_A \in mor_C\ (A,A)$ sehingga jika $f: A \rightarrow B$ dan $g: B \rightarrow C$, maka $f \circ 1_A = f$ dan $1_A \circ g = g$.

Sedangkan pengertian fungtor secara formal terlihat dalam definisi berikut.

Definisi 2.1.2

Misalkan C = (X, mor_C, $\circ$) dan D = ($\mathcal{D}$, map_D, $\circ$) masing – masing merupakan kategori. Sepasang fungsi $F = (F' , F'')$ adalah fungtor kovarian dari C ke D jika :

(i) F' adalah fungsi dari X ke $\mathcal{D}$ dan

(ii) F'' adalah fungsi dari morfisma-morfisma di C ke D sedemikian sehingga ($\forall A,B,C \in X$) dan ($\forall\ f : A \rightarrow B$ dan $g : B \rightarrow C$ di C) berlaku :

1. $F''(f) : F'(A) \rightarrow F'(B)$ di D.
2. $F''(g \circ f) = F''(g) \circ F''(f)$
3. $F''(1_A) = 1_{F'(A)}$

Jadi fungtor kovarian memetakan obyek ke obyek, morfisma ke morfisma, identitas ke identitas dan mengawetkan diagram komutatif berikut.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} F'(A) \arrow[r, "F''(f)"] \arrow[dr, "F''(g\circ f)"'] & F'(B) \arrow[d, "F''(g)"] \\ & F'(C) \end{tikzcd}$$

Sedangkan fungtor kontravarian adalah pasangan $F = (F', F'')$ yang memenuhi :

1. $F''(f) : F'(B) \rightarrow F'(A)$ di D.
2. $F''(g\circ f) = F''(f) \circ F''(g)$
3. $F''(1_A) = 1_{F'(A)}$.

Telihat bahwa syarat 1 dan 2 merupakan dual dari fungtor kovarian.

2.2 Aljabar Insidensi Berhingga atas Lapangan

Misalkan k menotasikan lapangan dan P sembarang poset. Notasikan dengan $I(P)$ himpunan jumlahan formal yang berbentuk

$$\alpha = \sum_{x\leq y} \alpha(x,y)[x,y] \qquad (2.2.1)$$

dengan

$$x,y\in P, \alpha(x,y)\in k, [x,y] = \{z\in P \mid x\leq z\leq y\}$$

Dalam kasus umum $I(P)$ bukan aljabar, hal ini dikarenakan jika P tidak berhingga lokal maka multiplikasi yang biasa dilakukan menjadi

$$\alpha.\beta = \sum_{x\leq y} \alpha(x,y)[x,y].\sum_{u\leq v} \beta(u,v)[u,v]$$

$$= \sum_{x\leq y}\left(\sum_{x\leq z\leq y} \alpha(x,z)\beta(z,y)\right)[x,y]$$

yang tidak selalu terdefinisi di $I(P)$, sehingga $I(P)$ hanya merupakan ruang insidensi. Jumlahan formal (2.2.1) disebut deret berhingga (*finitary series*) jika untuk sembarang $x,y\in P, x<y$, terdapat sejumlah hingga subsegment $[u,v]\subset[x,y]$ sedemikian sehingga $u\neq v$ dan $\alpha(u,v)\neq 0$. Himpunan semua deret berhingga dinotasikan dengan $FI(P)$ dan dipandang sebagai aljabar insidensi berhingga atas lapangan.

$FI(P)$ berstruktur aljabar asosiatif dan $I(P)$ adalah modul atas $FI(P)$

3. Hasil Dan Pembahasan

Selanjutnya dengan mengacu pada [speigel, 2007] dan [Khripchenko,2008] dibuatlah definisi Aljabar insidensi berhingga dari sembarang poset atas ring komutatif di bawah ini.

3.1 Aljabar Insidensi Berhingga

Aljabar insidensi berhingga dari poset X atas ring komutatif R, didefinisikan sebagai

$FININC(X,R) = \{ f : X \text{ x } X \rightarrow R : \forall x\leq y$ di X, terdapat hanya sejumlah hingga (x_1, y_1) dengan $x\leq x_1\leq y_1\leq y$ dan $f(x_1, y_1)\neq 0_R\}$

Dengan operasi :

$$(f+g)(x,y) = f(x,y) + g(x,y)$$

$$(f\cdot g)(x,y) = \sum_{x\leq z\leq y} f(x,z)\cdot g(z,y)$$

$(r\cdot f)(x,y) = r\cdot f(x,y)$, untuk setiap $f, g \in FININC(X,R)$ dan $x, y, z \in X$.

dapat dibuktikan bahwa *FININC(X,R)* berstruktur R-aljabar

Untuk menyelesaikan permasalahan yang disajikan di bagian pendahuluan, dilakukan cara sebagai berikut. Dengan asumsi bahwa fungtor yang akan terbentuk adalah kontravarian (seperti yang terjadi pada aljabar insidensi), dapat dibuat

diagram seperti di bawah ini (tanda panah berlawanan arah).
Dalam kasus ini f harus berada di *FININC* (Q,R), yaitu domain dari h*.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "F"] \arrow[d, "h"'] & FININC(P,R) \\ Q \arrow[r, "F"'] & FININC(Q,R) \arrow[u, "h*"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} PXP \arrow[rr, "f \circ (hxh)"] \arrow[d, "hxh"'] & & \mathrm{R} \\ QXQ \arrow[urr, "f"'] & & \end{tikzcd}$$

Selanjutnya akan diperiksa apakah
$h^*: FININC(Q,R) \to FININC(P,R)$
dengan $f \mapsto f \circ (hxh)$ merupakan *R*-homomorfisma aljabar, sebagai berikut:
Ambil sebarang f,g di *FININC* (Q,R), dan (a,b) di Q x Q, maka berlaku

$$\begin{aligned}
&h^*(f+g)(a,b) \\
&= ((f+g)\circ(hxh))(a,b) \\
&= (f\circ(hxh))(a,b) + (g\circ(hxh))(a,b) \\
&= (h^*(f) + h^*(g))(a,b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&h^*(f.g)(a,b) \\
&= ((f.g)\circ(h\mathrm{x}h))(a,b) \\
&= (f.g)(h(a),h(b)) \\
&= \sum_{h(a)\le z\le h(b)} f(h(a),z).g(z,h(b)) \\
&= \sum_{h(a)\le h(x)\le h(b)} f(h(a),h(x)).g(h(x),h(b)) \\
&= \sum_{a\le x\le b} f\circ(h\mathrm{x}h)(a,x).g\circ(h\mathrm{x}h)(x,b) \\
&= \sum_{a\le x\le b} h^*(f)(a,x).h^*(g)(x,b) \\
&= (h^*(f).\ h^*(g))(a,b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&h^*(r.f) = r.h^*(f), \\
&\forall r \in R,\ f \in FININC(P,R),
\end{aligned}$$

sebab

$$\begin{aligned}
&h^*(r.f)(a,b) \\
&= \left(r.f\circ(h\mathrm{x}h)\right)(a,b) \\
&= r.\left(f(h(a),h(b))\right) \\
&= r.\left(f\circ(h\mathrm{x}h)(a,b)\right) \\
&= r\left(h^*(f)\right)(a,b)
\end{aligned}$$

Dari uraian di atas terbukti bahwa
$h^*: FININC(Q,R) \to FININC(P,R)$
merupakan R- homomorfisma aljabar.

Selanjutnya akan dilihat komposisi fungsinya sebagai berikut :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{P} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "h"'] & FININC(P,R) \\ Q \arrow[r, "F"'] \arrow[d, "j"'] & FININC(Q,R) \arrow[u, "h*"'] \\ S \arrow[r, "F"'] & FININC(S,R) \arrow[u, "j*"'] \end{tikzcd}$$

Jika diamati unsur-unsurnya diperoleh ilustrasi sebagai berikut

$$\begin{tikzcd}
f \circ (j\text{x}j) \circ (h\text{x}h) \\
f \circ (j\text{x}j) \arrow[u, "h^*"] \\
f \arrow[u, "j^*"]
\end{tikzcd}$$

Selanjutnya akan diperiksa apakah $F(j \circ h) = F(h) \circ F(j)$, artinya apakah

$$F(j \circ h)(f) \underset{?}{=} F(h)(f) \circ F(j)(f)$$

$$f \circ (j \circ h)\text{x}(j \circ h) \underset{?}{=} \big(f \circ (h\text{x}h)\big) \circ \big(f \circ (j\text{x}j)\big)$$

$$\underset{?}{=} f \circ \big((h\text{x}h) \circ (j\text{x}j)\big)$$

Sehingga masalah dapat disederhanakan menjadi apakah $(j \circ h)\text{x}(j \circ h) \underset{?}{=} (h\text{x}h) \circ (j\text{x}j)$.

Salah satu cara yang dapat dilakukan adalah dengan memeriksa domainnya,
Misalkan *h : P→Q* dan *j : Q→S,* maka *j∘ h : P→S* akibatnya (*j∘ h*) x (*j∘ h*): *P* x *P→S* x *S* . Dari pemetaan *h* dan *j* yang diketahui dapat terbentuk *h* x *h*: *P*x*P→Q* x *Q* dan *j* x *j*: *Q*x*Q→S* x *S*, namun akibatnya (*hx h*) ∘ (*jx j*) tidak terdefinisi, sehingga proses tidak dapat dilanjutkan.

Selanjutnya, dengan menggunakan clue yang diberikan, dan tanpa mengasumsikan bahwa fungtornya harus kontravarian, maka diagram yang terbentuk adalah sebagai berikut :

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "F"] \arrow[d, "h"'] & FININC\big(P,R\big) \arrow[d, "\theta[h]"] \\
Q \arrow[r, "F"'] \arrow[d, "j"'] & FININC(Q,R) \arrow[d, "\theta[j]"] \\
S \arrow[r, "F"'] & FININC(S,R)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
f \arrow[d, "\theta[h]"] \\
G[f] \arrow[d, "\theta[j]"] \\
K[G]
\end{tikzcd}$$

Dari diagram di atas, perhatikan bahwa ;

$$\theta[h] : FININC(P,R) \to FININC(Q,R)$$

$$\theta[h](f) \overset{def}{=} G[f] \text{ dengan}$$

$$G[f]\big(h(a), h(b)\big) = f(a,b)$$

Akan ditunjukkan bahwa
$\theta[h]: FININC(P,R) \to FININC(Q,R)$
adalah morfisma aljabar.

$$\theta[h](f_1 + f_2)\big(h(a),h(b)\big)$$
$$= G[f_1 + f_2]\big(h(a),h(b)\big)$$
$$= (f_1 + f_2)(a,b) = f_1(a,b) + f_2(a,b)$$
$$= G[f_1]\big(h(a),h(b)\big) + G[f_2]\big(h(a),h(b)\big)$$
$$= \big(G[f_1] + G[f_2]\big)\big(h(a),h(b)\big)$$
$$= \big(\theta[h](f_1) + \theta[h](f_2)\big)\big(h(a),h(b)\big)$$

$$\theta[h](f_1.f_2)\big(h(a),h(b)\big)$$
$$= G[f_1.f_2]\big(h(a),h(b)\big)$$
$$= (f_1.f_2)(a,b)$$
$$= \sum_{a\le x\le b} f_1(a,x).f_2(x,b)$$
$$= \sum_{h(a)\le h(x)\le h(b)} G[f_1]\big(h(a),h(x)\big).$$
$$G[f_2]\big(h(x),h(b)\big)$$
$$= \big(G[f_1].G[f_2]\big)\big(h(a),h(b)\big)$$
$$= \big(\theta[h](f_1).\theta[h](f_2)\big)\big(h(a),h(b)\big)$$

$$\theta[h](r.f)\big(h(a),h(b)\big)$$
$$= G[r.f]\big(h(a),h(b)\big)$$
$$= (r.f)(a,b) = r.f(a,b)$$
$$= r.G[f]\big(h(a),h(b)\big)$$
$$= \big(r.\theta[h](f)\big)\big(h(a),h(b)\big)$$

Selanjutnya akan ditunjukkan
$F(j\circ h) = \big(\theta[j]\circ\theta[h]\big) = F(j)\circ F(h)$ sebagai berikut.

$$\theta[h](f) \stackrel{def}{=} G[f] \quad \text{dengan}$$
$$G[f]\big(h(a),h(b)\big) = f(a,b)$$
$$\theta[j](g) \stackrel{def}{=} K[g] \quad \text{dengan}$$
$$K[g]\big(j(x),j(y)\big) = g(x,y)$$

$$\big(\theta[j]\circ\theta[h]\big)(f) = \theta[j]\big(\theta[h](f)\big)$$
$$= \theta[j]\big(G[f]\big) = K[G[f]]$$

dengan

$$K[G[f]]\big(j(h(a)),\, j(h(b))\big)$$
$$= G[f](h(a),h(b)) = f(a,b)$$

Misalkan
$j\circ h = l : P \to S,\quad \theta[l](f) = K[f]$, karena
$l = j\circ h \Rightarrow \theta[l](f) = \theta[j\circ h](f) = K[G[f]]$,
maka $(\theta[j]\circ\theta[h])(f) = \theta(j\circ h)(f)$. Akibatnya
$$F(j\circ h) = \big(\theta[j]\circ\theta[h]\big) = F(j)\circ F(h)$$

Kemudian akan ditunjukkan berlaku
$F(1_Q) = 1_{F(Q)} = 1_{FININC(Q,R)}$ sebagai berikut.
Perhatikan bahwa $F(1_Q) = \theta[1_Q]$, sehingga

$$\theta[1_Q](g) = G[g](1_Q(a),1_Q(b))$$
$$= g(a,b)$$
$$= g(1_Q(a),1_Q(b))$$
$$= 1_{F(Q)}[g](1_Q(a),1_Q(b))$$

Akibatnya $F(1_Q) = 1_{F(Q)}$.
Dari pembuktian di atas terlihat bahwa *F* adalah fungtor kovarian.

4. Kesimpulan

Dari alur pembahasan di atas dapat dibuat suatu teorema sebagai berikut :
Misalkan *P* , *Q* masing-masing sembarang poset dan *R* adalah ring komutatif dengan satuan. Misalkan pula *FININC(P,R)* adalah aljabar insidensi berhingga dari poset *P* atas ring komutatif *R*.
Jika *h : P→Q* merupakan pemetaan monoton dari poset *P* ke poset *Q* dan untuk setiap *f* di *FININC(P,R)* pemetaan G(*f*) : *QxQ→R* memenuhi G(*f*)(*h*(*a*),*h*(*b*))= *f*(*a*,*b*) dan G(*f*)(*q*,*q*)=1 maka terdapat fungtor kovarian dari kategori sembarang poset ke kategori aljabar insidensi berhingga.

5. Daftar Pustaka

Anderson, F.W and Fuller, K.R. 1992. *Rings and Categories of Modules*, second edition, New York : Springer-Verlag.

Awodey. S., 2006.*Category Theory*, Calredon Press, Oxford .

Carnia, Ema, 2007. *Fungtor dari Kategori Poset ke Kategori Simplicial Complexes*, Proceeding Seminar Nasional Matematika, di Universitas Pendidikan Indonesia, Bandung, pp.153-157.

Khripchenko, N. S, Novikov, B. V, 2008., *Finitary incidence algebras*, arXiv:0803.0069v1 [math.RA]

Spiegel E, J. O Donnel, 1997,*Incidence Algebras*, Marcel Dekker Inc, New York.

Stanley, Richard P, 2006.*Enumerative Combinatorics*, Volume 1, Cambridge University Press. New York.

Zapatrin, 2006,*Incidence Algebra of Simplicial Compexes*, arXiv: math. CO/.0001065 v1.