TENTANG MEKANIKA DALAM RUANG TAK–ISOTROP

Muhammad Farchani Rosyid[1]

Kelompok Penelitian Kosmologi, Astrofisika dan Fisika Matematik
Jurusan Fisika FMIPA UGM
Yogyakrta, INDONESIA

INTISARI

Kemungkinan kemunculan konsep tensor massa dalam ranah fisika dibicarakan. Konsep tensor massa yang dimaksud merupakan perluasan bagi konsep massa yang telah lazim diterima secara luas sebagai besaran skalar. Cara mengkopling tensor massa ini ke dalam persamaan-persamaan dinamika telah ditunjukkan, baik pada tataran klasik maupun pada tataran kuantum. Pemerian kuantum diperoleh melalui pengkuantuman geometris setelah pemerian klasik didapatkan. Dua kasus ruang konfigurasi juga dibahas guna mendapatkan gambaran tentang beberapa pengaruh tensor massa pada geometri ruang.

Kata kunci : tensor massa, pengkuantuman geometris, dinamika

ABSTRACT

The posibility that a tensorial mass concept is needed in physics is discussed. The concept of the tensorial mass is proposed to be a generalization of the usual mass concept in which mass is regarded as a tensor quantity. How mass tensors are involved into the dynamical equations on the classical as well as on the quantum mechanical level is persented. The quantum description of a physical system involving a tensorial mass is obtained by making use of geometric quantization soon after the classical one is constructed. Some influences of the mass tensor on the dynamical equation are studied via two cases of configuration spaces.

Keywords : mass tensor, geometric quantization, dynamics.

[1] Alamat e-mail: farchani@ugm.ac.id

1. PENDAHULUAN

Kondratenko memandang setiap pelaku ekonomi sebagai zarah mikroskopis dalam *ruang harga* (Kondratenko, 2007). Dalam hal ini, keadaan setiap pelaku ekonomi dikaitkan dengan sebuah fungsi gelombang sebagaimana sebuah zarah mikroskopis. Jika seorang pelaku ekonomi pada saat t memiliki fungsi gelombang φ, dikatakan bahwa pelaku ekonomi tersebut berada pada *keadaan* φ pada saat itu. Jika $\varphi(x)$, $x \in \mathbf{R}$ fungsi gelombang seorang pelaku ekonomi, maka garis riil $\mathbf{R}$ merupakan ruang harga yang terkait dengan suatu komoditas, sedangkan

$$P(\varphi) := |\varphi(x)|^2 \; dx$$

merupakan peluang bahwa persepsi pelaku ekonomi tersebut akan harga komoditas itu berada pada nilai antara x dan $x + dx$. Jadi, nilai harap $\langle x \rangle$ adalah harga komoditas itu menurut pelaku ekonomi tersebut. Jika komoditas yang dibicarakan lebih dari satu macam, semisal N komoditas, maka setiap pelaku ekonomi dipandang berada dalam ruang $\mathbf{R}^N$ yang setiap sumbunya berperan sebagai ruang harga masing-masing komoditas yang dibicarakan dan pelaku ekonomi itu memiliki fungsi gelombang $\varphi : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$,. Hal penting yang belum diketengahkan dalam (Kondratenko, 2007) adalah timpalan (*counterpart*) ekonomis bagi massa inersial zarah, yakni suatu konsep dalam ekonomi (mikro) yang memiliki peran sebagaimana massa inersial dalam mekanika. Oleh karena itu perlu diusulkan konsep *massa ekonomis* sebagai perpadanan konsep massa inersial dalam fisika. Massa ekonomis seorang pelaku ekonomi adalah sebuah besaran skalar yang menunjukkan kelembaman pelaku ekonomi tersebut dalam ruang harga komoditas yang terkait. Jadi, massa ekonomis merupakan ukuran "keengganan" pelaku ekonomi untuk merubah persepsinya akan harga suatu komoditas. Namun, tampaknya, konsep massa ekonomis sebagai sebuah skalar ini masih kurang tepat, sebab "keengganan" seorang pelaku ekonomi untuk mengubah persepsi harga bervariasi dari suatu komoditas ke komoditas lain. Oleh karena itu, massa ekonomis bergantung pada "arah pergerakan". Jadi, massa ekonomis tentu bukan sekedar besaran skalar. Secara kederajatan, skalar memiliki derajat paling rendah dalam aljabar tensor. Jadi, sejatinya tersedia banyak konsep matematis untuk mengganti konsep skalar massa. Makalah ini hendak membahas kemungkinan bahwa massa secara umum (bukan hanya massa ekonomis) adalah besaran tensor berderajat dua.

Bahwa kelembaman sebuah benda dikaitkan dengan tensor sejatinya bukan hal baru dalam fisika. Tensor kelembaman yang berperan dalam gerak rotasi dengan sumbu tak tetap merupakan contoh yang paling dikenal. Inilah salah satu alasan dipilihnya tensor berderajat dua sebagai tensor massa. Konsep tensor massa juga sudah diperkenalkan dalam (Afriat, 2005) namun dalam kaitan dan *wujud* yang jauh berbeda dari yang hendak dibicarakan dalam makalah ini.

Konsep tensor massa yang hendak dibicarakan dalam makalah ini tampak lebih dekat dengan konsep tensor massa efektif yang muncul dalam dinamika elektron Bloch dalam padatan sepanjang bidang kekisi dengan permukaan isoenergi yang elipsoid (Blasone, dkk., 1996; Fujita dan Ito, 2007). Penggantian skalar massa dengan tensor massa untuk menggambarkan kelembaman zarah dalam gerak translasional menuntut untuk dibuangnya anggapan akan isotropi ruang konfigurasi. Dalam kasus dinamika elektron Bloch, ketakisotropian ruang disebabkan oleh keberadaan potensial kekisi yang periodik. Jadi, mekanika yang hendak dibicarakan dalam makalah ini adalah mekanika dalam ruang konfigurasi yang tak isotrop. Istilah "isotrop" maupun "isotropi" dalam hal ini lebih cenderung terkait dengan *keadilan* dalam arah, bukan *kesamaan* dalam arah. Istilah "isotrop" maupun "isotropi" dalam kaitan ini tidak boleh dirancukan dengan "isotrop" dan "isotropi" dalam prinsip kosmologis, sehingga tinjauan ini masih dapat diterapkan untuk ruang bagi alam semesta ini.

Dalam makalah ini, cara meng-kopling tensor massa ke dalam berbagai persamaan dinamika baik pada tataran klasik maupun pada tataran kuantum juga akan dibahas. Pemerian kuantum diperoleh melalui pengkuantuman. Terdapat beberapa metode pengkuantuman yang dapat diterapkan. Dalam makalah ini, metode pengkuantuman geometris (Rosyid, 2003; Śniatycki, 1980; Woodhouse, 1980) dipilih untuk diterapkan dalam rangka mendapatkan pemerian kuantum bagi sistem mekanik dalam ruang tak-isotrop. Pengaruh tensor massa bagi geometri beberapa kasus ruang konfigurasi juga dibicarakan guna mendapatkan gambaran nyata.

2. KEMUNCULAN TENSOR MASSA DALAM MEKANIKA KLASIK

Andaikan (Q,g) suatu keragaman (*manifold*) Riemannan berdimensi n, dengan tensor metrik kovarian g dan $V:Q\to\mathbf{R}$ sebuah fungsi bernilai riil yang berkelas C^∞ pada keragaman Q. Keragaman Riemannan (Q,g) bertindak sebagai ruang konfigurasi bagi sebuah sistem mekanis, sedangkan fungsi V bertindak sebagai potensial terkait dengan suatu medan gaya lestari (konservatif). Dalam mekanika klasik, dinamika sebuah zarah yang bermassa m pada keragaman Q di bawah pengaruh potensial V digambarkan oleh fungsi Lagrangean $L:TQ\to\mathbf{R}$ yang didefinisikan pada untingan singgung (bundel tangensial) $\pi:Q\to TQ$ (sebagai ruang fase kecepatan), sedemikian rupa sehingga untuk setiap $\alpha\in TQ$ berlaku

$$L(\alpha)=\frac{1}{2}mg_{\pi(\alpha)}(\vec{X},\vec{X})-V(\pi(\alpha)), \quad (1)$$

dengan $\vec{X}$ adalah vektor singgung pada Q di titik $\pi(\alpha)$ yang terkait dengan $\alpha\in TQ$. Untuk fungsi Lagrangean yang *hipereguler* (Abraham, 1978), alihragam Legendre $FL:TQ\to T^*Q$ menghasilkan Hamiltonan $H=E\circ(FL)^{-1}$ yang didefinisikan pada untingan kotangensial (bundel kotangensial) $\Pi:T^*Q\to Q$ (sebagai ruang fase momentum), dengan $E:TQ\to\mathbf{R}$ adalah fungsi energi terkait dengan Lagrangean L. Dalam hal ini, untuk setiap $\Xi\in T^*Q$ berlaku

$$\begin{aligned}H(\Xi)&=E\circ(FL)^{-1}(\Xi)\\ &=\frac{1}{2m}\underline{g}_{\Pi(\Xi)}(\underset{\rightarrow}{p},\underset{\rightarrow}{p})+V(\Pi(\Xi)),\end{aligned} \quad (2)$$

dengan $\underline{g}$ adalah tensor metrik kontravarian terkait metrik g dan $\underset{\rightarrow}{p}$ adalah kovektor pada keragaman Q di titik $\Pi(\Xi)\in Q$ yang terkait dengan Ξ.

Karena skalar massa $m>0$, maka mg merupakan medan tensor metrik yang juga definit positif. Terlihat bahwa keberadaan zarah bermassa m mengimbas alihragam konformal $g\mapsto mg$. Tetapi hal ini tidak menimbulkan perubahan geometri ruang konfigurasi Q kecuali sekala kelengkungannya sebab kedua metrik tersebut mengimbas koneksi Levi-Civita yang sama. Metrik mg dapat diperoleh melalui jalan lain. Andaikan mI adalah perkalian skalar m dengan tensor I yang memiliki komponen

$$I^i{}_j=\delta^i{}_j.$$

Tensor mg diperoleh dengan mengambil hasilkali tensor antara tensor g dengan tensor mI dan mengontraksikan hasilnya :

$$\left(g\otimes mI\right)_{il}{}^{kj}=mg_{il}\delta^k{}_j$$

$$\Big\downarrow \text{dikontraksi}$$

$$mg_{il}\delta^l{}_j=mg_{ij}.$$

Sekarang andaikan $\mu\in\mathfrak{T}^1_1(Q)$ sebuah medan tensor campuran pada Q. Jadi, μ adalah pemetaan

$$\mu:\Lambda^1(Q)\times\mathfrak{X}(Q)\to\mathbf{R},$$

dengan $\Lambda^1(Q)$ dan $\mathfrak{X}(Q)$ berturut-turut adalah medan kovektor dan himpunan yang beranggotakan semua medan vektor yang diferensiabel pada *Q*. Oleh karena itu, μ mengimbas pemetaan $\bar{\mu}$ yang didefinisikan oleh

$$\begin{aligned} \bar{\mu} &: \mathfrak{X}(Q) \to \Lambda^1(Q) \\ &: \vec{X} \mapsto \bar{\mu}(\vec{X}) = \mu(\mathbf{R}, \vec{X}). \end{aligned} \qquad (3)$$

Selanjutnya, hendak didefinisikan pemetaan $\tilde{g} : \mathfrak{X}(Q) \times \mathfrak{X}(Q) \to \mathbf{R}$, menurut

$$\tilde{g}(\vec{X}, \vec{Y}) = g(\vec{X}, \bar{\mu}(\vec{Y}), \qquad (4)$$

untuk setiap pasang medan vektor $\vec{X}, \vec{Y} \in \mathfrak{X}(Q)$. Persamaan (4) setara dengan

$$\tilde{g}_{ij} X^i Y^j = g_{il} \mu^l{}_j X^i Y^j, \qquad (5)$$

jika ditulis dalam tata koordinat setempat (lokal).

Definisi 1: *Tensor* μ *disebut tensor massa jika tensor* $\tilde{g}$ *dalam persamaan* (4) *bersifat setangkup dan definit positif, sehingga tensor yang terakhir ini juga merupakan tensor metrik pada keragaman yang sama.*

Kopling antara tensor metrik dengan tensor massa menghasilkan tensor metrik $\tilde{g}$ yang (dapat dibuktikan) mengimbas koneksi yang tak setara dengan yang diimbas oleh metrik latar g. Hal ini mengingatkan orang akan semangat teori relativitas umum Einstein bahwa massa memengaruhi geometri ruang-waktu.

Melalui perhitungan per komponen yang tidak terlalu panjang, berlakunya kaidah berikut dapat dibuktikan:

Proposisi 1:
Untuk tensor massa yang berbentuk $\mu = mI$, *dengan* m *suatu skalar dan* I *tensor yang memiliki komponen* $I^i{}_j = \delta^i{}_j$, *kurva* c *merupakan geodesik pada* (Q, g) *jika dan hanya jika* c *geodesik pada* $(Q, \tilde{g})$.

Dengan adanya kopling tensor massa ini, Lagrangean pada persamaan (1) menjadi

$$L(\alpha) = \frac{1}{2} \tilde{g}_{\pi(\alpha)}(\vec{X}, \vec{X}) - V(\pi(\alpha)). \qquad (6)$$

Selanjutnya, dinamika sistem atau persamaan gerak sistem dapat diturunkan melalui beberapa proposisi berikut yang juga dapat dibuktikan melalui perhitungan perkomponen dalam sebarang tata koordinat setempat.

Proposisi 2: *Kurva* $c : (a,b) \to Q$ *pada keragaman Q memenuhi persamaan Euler-Lagrange untuk zarah bebas dengan Lagrangean*

$$L(\alpha) = \frac{1}{2} \tilde{g}_{\pi(\alpha)}(\vec{X}, \vec{X})$$

jika dan hanya jika kurva c *merupakan geodesik pada keragaman* Q.

Proposisi 3: *Kurva* $c : (a,b) \to Q$ *pada keragaman Q memenuhi persamaan Euler-Lagrange jika dan hanya jika*

$$\tilde{\nabla}_{\vec{X}^c} \vec{X}^c = -(grad_{\tilde{g}} V)(c(t)), \qquad (7)$$

dengan $\tilde{\nabla}$ *adalah koneksi yang diimbas oleh metrik* $\tilde{g}$ *dan* $\vec{X}^c$ *medan vektor sepanjang kurva* c.

Dengan alihragam Legendre, didapatkan Hamiltonan

$$H(\Xi) = \frac{1}{2} \underline{\tilde{g}}_{\Pi(\Xi)}(\underset{\rightarrow}{p}, \underset{\rightarrow}{p}) + V(\Pi(\Xi)). \qquad (8)$$

Selanjutnya, persamaan gerak sistem ditentukan dari persamaan Hamilton berikut

$$dH + i_{X_H}\omega_K = 0, \tag{9}$$

dengan ω_K struktur simplektis kanonis pada untingan kotangensial T^*Q yang tidak terpengaruh oleh adanya perubahan metrik pada ruang konfigurasi.

Perlu ditekankan bahwa pernyataan dalam Proposisi 1 tidak berlaku bagi tensor massa selain yang berbentuk $\mu = mI$. Dari Proposisi 1 dan 2, terlihat dengan jelas bahwa gerak zarah bebas dalam ruang isotrop tidak bergantung pada massa zarah, melainkan hanya pada metrik latar. Hal ini tidak berlaku dalam ruang yang tak isotrop. Dalam hal ini, gerak zarah bebas selain ditentukan oleh metrik latar, juga ditentukan oleh tensor massa.

3. PADA TATARAN KUANTUM

Setelah membahas pemerian klasik suatu sistem mekanik dalam ruang tak-isotrop, pemerian kuantumnya dapat diperoleh melalui, misalnya, prosedur pengkuantuman geometris dengan polarisasi vertikal (Rosyid, 2003). Dalam prosedur pengkuantuman ini, ruang fase kuantum yang dipilih adalah ruang Hilbert

$$L^2(Q, d\nu_{\tilde{g}}) = \{\varphi \in \mathfrak{F}(Q, \mathbf{R}) : \int_Q |\varphi|^2 \, d\nu_{\tilde{g}} < \infty\}, \tag{10}$$

yakni himpunan yang beranggotakan semua fungsi bernilai kompleks pada Q yang *sequar integrable* relatif terhadap ukuran metrik

$$d\nu_{\tilde{g}} = (\det(\tilde{g}_{ij}))^{1/2} dq^1 \wedge dq^2 \wedge \ldots \wedge dq^n,$$

dengan produk skalar

$$\langle \varphi, \phi \rangle = \int_Q \varphi^* \phi \, d\nu_{\tilde{g}}.$$

Ruang ini isomorfis dengan ruang yang beranggotakan semua tampang lintang terpolarisasi yang *square integrable* pada untingan kuantum (*quantum bundle*). Tidak semua besaran klasik memiliki padanan kuantum (berupa operator yang hermitean). Jadi, tidak semua besaran fisika klasik *dapat dikuantumkan*. Besaran fisika klasik $k \in C^\infty(T^*Q, \mathbf{R})$ dapat dikuantumkan jika medan vektor Hamiltonannya melestarikan *polarisasi vertikal*. Padanan kuantum bagi besaran k diberikan oleh

$$\hat{k}\varphi = -i\hbar \pi_* \vec{X}_k(\varphi) + (k - \theta(\vec{X}_k))\varphi + \frac{1}{2} div_{\tilde{g}}(\pi_* \vec{X}_k)\varphi, \tag{11}$$

untuk setiap $\varphi \in L^2(Q, d\nu_{\tilde{g}})$, dengan $\vec{X}_k$ medan vektor Hamiltonan terkait besaran k dan θ adalah potensial simplektis pada Q (Abraham, 1978). Karena

$$div_{\tilde{g}}(\vec{X}) = div_g(\vec{X}),$$

untuk semua medan vektor $\vec{X}$ pada Q, maka hanya geometri latar yang berpengaruh pada bentuk operator yang mewakili besaran k. Besaran energi mekanik tidak termasuk kelompok besaran yang dapat dikuantumkan sebab medan vektor Hamiltonannya tidak melestarikan polarisasi vertikal. Oleh karena itu persamaan (11) tidak dapat diterapkan untuk besaran ini. Operator untuk Hamiltonan harus diperoleh melalui mekanisme BKS (Woodhouse, 1980). Hasilnya diberikan oleh

$$\hat{\hat{H}}\varphi = -\frac{\hbar^2}{2}\tilde{\Delta}\varphi + \frac{\hbar^2}{12}\tilde{R}\varphi + V\varphi, \tag{12}$$

untuk setiap $\varphi \in L^2(Q, d\nu_{\tilde{g}})$, dengan $\tilde{R}$ merupakan kelengkungan skalar dan $\tilde{\Delta}$ operator Laplace-Beltrami terkait metrik $\tilde{g}$. Hamiltonan persaamaan (12) menentukan dinamika kuantum sistem mekanis yang ditinjau. Melalui perhitungan yang tidak terlalu panjang, jika terdapat suatu tata koordinat setempat yang sedemikian rupa sehingga seluruh komponen tensor massa tetap, kelengkungan $\tilde{R}$ diberikan oleh

$$\tilde{R} = K(\mu, g) + \mu_r{}^l g^{rj} g^{ki} (g_{jk,li} - g_{ik,lj}) + \mu_t{}^i \mu_s{}^h \mu^r{}_a g^{jt} g^{ks} \left[\Gamma^a{}_{ij} \Gamma_{rhk} - \Gamma^a{}_{ik} \Gamma_{rhj} \right], \quad (13)$$

dengan $\mu_r{}^l$ adalah komponen suatu tensor yang memenuhi persamaan $\mu_r{}^l \mu^r{}_s = \delta^l_s$, $\Gamma^i{}_{jk}$ *lambang Christoffel*, dan $K(\mu, g)$ adalah rangkuman suku-suku sisa yang bergantung pada unsur-unsur tensor massa dan metrik latar. Sementara, sebagai pembanding, kelengkungan skalar yang terkait dengan metrik latar g diberikan oleh

$$R = g^{lj} g^{ki} (g_{jk,li} - g_{ik,lj}) + g^{rk} g^{ij} \left[\Gamma^l{}_{ij} \Gamma_{lrk} - \Gamma^l{}_{ik} \Gamma_{lrj} \right] \quad (14)$$

Dalam tata koordinat tersebut, operator Laplace-Beltrami $\tilde{\Delta}$ diberikan oleh

$$\tilde{\Delta} = \frac{\mu_k{}^i}{\sqrt{G}} \partial_i \left[\sqrt{G} g^{kj} \partial_j f \right], \quad (15)$$

dengan G adalah determinan wakilan matriks tensor metrik latar g_{ij}.

Baik persamaan (13) dan (14) memperlihatkan pengaruh signifikan tensor massa pada kelengkungan ruang konfigurasi. Jika tensor massa zarah berbentuk $\mu = mI$, maka $\tilde{R} = mR$ dan $\tilde{\Delta} = m\Delta$. Untuk partikel bebas dengan $\mu = mI$, berlaku

$$\hat{\tilde{H}} = m\hat{H}.$$

4. BEBERAPA KASUS RUANG KONFIGURASI

Dalam bagian ini dua kasus hendak dibicarakan guna dapat melihat pengaruh tensor massa pada dinamika sistem mekanis baik pada tataran klasik maupun pada tataran kuantum.

A. Ruang Euklid $\mathbf{R}^n$

Hendak ditinjau sistem mekanik yang berupa sebuah zarah dengan tensor massa μ dalam ruang Euklid berdimensi n dan di bawah pengaruh medan gaya lestari dengan potensial V. Dalam hal ini, $Q = \mathbf{R}^n$, dengan metrik latar adalah metrik Euklid $g_{ij} = \delta_{ij}$. Dari persamaan (5),

$$\tilde{g}_{ij} = \delta_{il} \mu^l{}_j = \mu_{ij},$$

sehingga tensor μ_{ij} harus setangkup dan definit positif. Dalam tata koordinat setempat, fungsi Lagrangean dan Hamiltonan untuk sistem ini diberikan berturut-turut oleh

$$L(x^i, \dot{x}^j) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \mu_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j - V(x^i)$$

dan

$$H(x^i, p^j) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \mu^{ij} p_i p_j + V(x^i),$$

dengan $\mu_{il} \mu^{lj} = \delta_{ij}$ dan $p_i = \mu_{il} \dot{x}^l$. Persamaan (7) menghasilkan

$$\begin{aligned} F_j &:= -\frac{\partial V}{\partial x^j} = \mu_{ji} \frac{d^2 x^i}{dt^2} \\ &= \mu_{j1} \frac{d^2 x^1}{dt^2} + \mu_{j2} \frac{d^2 x^2}{dt^2} + \cdots + \mu_{jn} \frac{d^2 x^n}{dt^2}, \end{aligned}$$

yakni hukum kedua Newton tentang gerak terlepas adanya kopling antar komponen percepatan. Pada tataran kuantum, besaran fisis k yang dapat dikuantumkan berbentuk

$$k(x, p) = \xi^j (x^i) p_j + \varsigma(x), \quad (16)$$

dengan ξ^j dan ς adalah sebarang fungsi berkelas C^∞ pada ruang konfigurasi. Sementara operator yang mewakili besaran k diberikan oleh

$$\hat{k}\varphi = -i\hbar\xi^j \frac{\partial\varphi}{\partial x^j} + \varsigma\varphi + \frac{1}{2}\frac{\partial\xi^j}{\partial x^j}\varphi, \quad (17)$$

untuk semua fungsi gelombang φ. Terlihat bahwa operator untuk sebarang besaran fisis yang terkuantumkan tidak terpengaruh oleh tensor massa. Karena kelengkungannya lenyap, operator Hamiltonan dalam hal ini diberikan oleh

$$\hat{H}\varphi = -\frac{\hbar^2}{2}\mu^{ij}\partial_i\partial_j\varphi + V\varphi, \quad (18)$$

untuk semua fungsi gelombang φ. Terlihat tiadanya pengaruh tensor massa pada geometri ruang konfigurasi. Persamaan Schrödinger yang menggambarkan dinamika zarah tersebut adalah

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2}\mu^{ij}\partial_i\partial_j\psi(x,t) + V\psi(x,t). \quad (19)$$

B. Alam Semesta Model Robertson-Walker Dengan Komponen Waktu Dibekukan

Jika waktu kosmologis dibatasi dalam rentang waktu karakteristik *sekarang*, maka parameter $R(t)$ dan ukuran alam semesta boleh dianggap tetap. Berdasarkan prinsip kosmologis hanya terdapat tiga macam ruang yang mungkin bagi alam semesta : ruang flat tiga dimensi, permukaan hiperboloid berdimensi tiga, dan permukaan bola tiga dimensi. Tensor metrik kovarian untuk ketiganya dirangkum dalam tata koordinat kulit bola (r,θ,ϕ) oleh persamaan berikut

$$ds_S^2 = R^2(0)\times \left[\frac{dr^2}{(1-kr)^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi)\right], \quad (20)$$

dengan $k=-1$ untuk hiperbolaida, $k=0$ untuk yang flat, dan $k=1$ untuk permukaan bola. Oleh karena itu

$$\tilde{g}_{ij} = \beta_i\delta_{il}\mu^l{}_j = \beta_i\mu_{ij}.$$

Demi penyederhanaan penulisan, dipilih sekala alam semesta $R(0)=1$. Oleh karena itu, Lagrangan untuk masalah ini diberikan oleh

$$\begin{aligned} L = \frac{1}{2}\Big[& \frac{\mu^r{}_r\dot{r}^2}{1-kr^2} + \frac{\mu^r{}_\theta\dot{r}\dot{\theta}}{1-kr^2} + \frac{\mu^r{}_\phi\dot{r}\dot{\phi}}{1-kr^2} \\ & + r^2\mu^\theta{}_r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\mu^\theta{}_\theta\dot{\theta}^2 + r^2\mu^\theta{}_\phi\dot{\theta}\dot{\phi} \\ & + r^2\sin^2\theta\mu^\phi{}_r\dot{r}\dot{\phi} + r^2\sin^2\theta\mu^\phi{}_\theta\dot{\theta}\dot{\phi} \\ & + r^2\sin^2\theta\mu^\phi{}_\phi\dot{\phi}^2 \Big] - V(r,\theta,\phi), \end{aligned} \quad (21)$$

sedangkan Hamiltonannya adalah

$$\begin{aligned} H = \frac{1}{2}\Big[& (1-kr^2)\mu_r{}^r p_r^2 + (1-kr^2)\mu_r{}^\theta p_r p_\theta \\ & + (1-kr^2)\mu_r{}^\phi p_r p_\phi + \frac{\mu_\theta{}^r p_r p_\theta}{r^2} + \frac{\mu_\theta{}^\theta p_\theta^2}{r^2} \\ & + \frac{\mu_\theta{}^\phi p_\theta p_\phi}{r^2} + \frac{\mu_\phi{}^r p_r p_\phi}{r^2\sin^2\theta} + \frac{\mu_\phi{}^\theta p_\phi p_\theta}{r^2\sin^2\theta} \\ & + \frac{\mu_\phi{}^\phi p_\phi^2}{r^2\sin^2\theta} \Big] + V(r,\theta,\phi). \end{aligned} \quad (22)$$

Persamaan gerak zarah segera dapat diperoleh melalui persamaan Euler-Lagrange dan persamaan Hamilton. Besaran fisis yang dapat dikuantumkan berbentuk

$$k(r,\theta,\phi,p_r,p_\theta,p_\phi)=\xi^r(r,\theta,\phi)\,p_r \\ +\xi^\theta(r,\theta,\phi)\,p_\theta+\xi^\phi(r,\theta,\phi)\,p_\phi+\varsigma(r,\theta,\phi) \quad (23)$$

Karena $div_g\vec{X}=div_{\bar{g}}\vec{X}$ untuk tensor massa yang tetap, besaran fisis k diwakili oleh operator

$$\hat{k}\varphi=-i\hbar\left[\xi^r\frac{\partial\varphi}{\partial x^r}+\xi^\theta\frac{\partial\varphi}{\partial x^\theta}+\xi^\phi\frac{\partial\varphi}{\partial x^\phi}\right]+\varsigma\varphi \\ +\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1-kr^2}}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r^2\xi^r}{\sqrt{1-kr^2}}\right)\varphi \\ +\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\xi^\theta\right)\varphi+\frac{1}{2}\frac{\partial\xi^\phi}{\partial\phi}\varphi, \quad (24)$$

untuk semua fungsi gelombang $\varphi(r,\theta,\phi)$. Pada persamaan (24) terlihat bahwa hanya geometri latar yang berpengaruh pada operator. Operator Hamiltonan akan didapat jika kelengkungan dan operator Laplace-Beltrami telah dihitung.

5. KESIMPULAN

Tensor massa memengaruhi dinamika sistem mekanis, baik pada tataran klasik maupun kuantum, melalui geometri ruang konfigurasi. Dalam ruang yang isotrop, gerak benda bebas hanya ditentukan oleh geometri latar, sedangkan dalam ruang tak-isotrop, gerak zarah bebas selain ditentukan oleh metrik latar, juga ditentukan oleh tensor massanya. Hanya geometri latar yang berpengaruh pada bentuk operator yang mewakili besaran yang dapat dikuantumkan.

REFERENSI

Abraham, R., dan Marsden, J.E., 1978. *Foundations of Mechanics*, edisi kedua. The Benjamin/Cummings Publishing Company, London.

Afriat, A., 2005. Cartesian and Lagrangian Momentum, *Foundation of Physics Letters*, 18 (2005), hal. 371-378.

Blasone, M., Graziano, E., Pashaev, O.K., dan Vitiello, 1996. Dissipation and Topologically Massive Gauge Theories in the Pseudo-Euclidean Plane, *Annals of Physics* 252, hal. 115-132.

Fujita, S., dan Ito, K., 2007. *Quantum Theory of Conducting Matter*, Springer-Verlag, Berlin, hal. 115-130.

Kondratenko, A.V., 2007. Physical Modeling of Economic Systems. Classical and Quantum Economies, *MPRA* 10452 (2007).

Rosyid, M.F., 2003. On the Relation between Configuration and Phase Space Quantization I, *Journal of the Indonesian Mathematical Society*, vol. 9 no. 1 (2003).

Śniatycki, J., 1980. *Geometric Quantization and Quantum Mechanics*, Springer Verlag, Berlin.

Woodhouse, N.M.J., 1980. *Geometric Quantization*, Clarendon Press, Oxford.