Perumusan Gerak Stokastik Benda Tegar dalam Ruang Konfigurasi $\boldsymbol{SE}(\mathbf{3})$

The Formulation of Stochastic Motion of Rigid Body on the Configuration Space $\boldsymbol{SE}(\mathbf{3})$

Apriana* dan Muhammad Farchani Rosyid

Lab. Fisika Atom dan Inti, Departemen Fisika FMIPA, UGM,
Jl. Kaliurang Km 3, Yogyakarta
*Email: apriana54@yahoo.co.id

Abstrak

Telah dilakukan telaah teoretis perumusan gerak stokastik benda tegar dalam ruang konfigurasi SE(3). Dengan menggunakan aksi ajoin untuk mendapatkan bentuk umum gerak benda tegar yang menggambarkan gerak rotasi dan translasi yang ditentukan oleh persamaan diferensial. Sementara, untuk model di bawah pengaruh usikan acak, gerak benda tegar dapat diperoleh dengan menggunakan persamaan diferensial stokastik Stratanovich. Oleh karena itu, gerak benda tegar di bawah pengaruh usikan acak dapat ditentukan oleh persamaan diferensial stokastik. Selanjutnya, dengan menggunakan analisis stokastik dapat diperoleh kecepatan umum rata-rata gerak benda tegar.

Kata kunci: *Benda Tegar, Grup Euclide Khusus (*$SE(3)$*), Grup Lie Kompak, dan Persamaan Diferensial Stokastik.*

Abstract

A theoretical study of formulation of stochastic motion of a rigid body on the confi-guration space SE(3) has been done. By using adjoint action general form of rigid body motion that describes rotational and translational motion that are determined by differential equation has been obtained. Meanwhile, for the model under a random pertubation the rigid body motion can be obtained by using Stratonovich stochastic differential equation. Therefore, the motion of rigid body under a random pertubation can be determined by stochastic differential equation. Furthermore, by using stochastic analysis an average general velocity of motion of rigid body can be obtained.

Keywords: *Compact Lie Grup, Rigid Body, Special Euclide Group (*$SE(3)$*), and Stochastic Differential Equation.*

1. Pendahuluan

Fisika berkaitan erat dengan matematika. Banyak teori fisika yang diformulasikan dalam matematika, dan matematika yang digunakan tentunya tidaklah sederhana. Perbedaan antara fisika dan matematika yaitu; fisika berkaitan dengan fenomena fisis, sedangkan matematika berkaitan dengan pola-pola abstrak.

Pandangan tentang hubungan antara fisika dan matematika beranekaragam, yaitu pandangan minimalis sampai maksimalis, yakni bermula pada matematika hanya sebagai bahasa agar fisika menjadi lebih mudah dipahami, hingga fisika sebagai upaya menemukan matematika alam. Pandangan moderat mengatakan bahwa fisika adalah upaya menemukan kaidah-kaidah atau pola-pola keteraturan yang ditaati oleh alam dan membingkainya secara matematis untuk menentukan hubungan antara besaran-besaran fisis yang ada. Artinya, fisika adalah upaya untuk mencari wakilan realitas fisis dalam realitas matematis. Matematiskah alam ini? jika perilaku-perilaku alam akan dirumuskan dengan model matematis, lalu, dapatkah segala perilaku alam ini dimodelkan secara matematis? Seandainya alam ini matematis, maka tentu saja alam ini tidak boleh "melebihi" matematika. Matematika sendiri telah terikat oleh alam ini. Oleh karenanya, yang disebut matematika telah dibatasi oleh alam. Disimpulkan bahwa, fisika hanyalah berusaha mendapatkan pola-pola matematis yang paling dekat dengan kaidah-kaidah atau pola-pola alam (Rosyid, 2015).

Pola-pola matematis dapat dijelaskan dalam kajian-kajian fisika teoritik yang mencakup grup Lie, proses stokastik, dan kajian-kajian lainya. Grup Lie dan aljabar Lie adalah obyek matematika yang pertama kali diteliti oleh Sophus Lie (1842-1899) guna menyelesaikan persamaan diferensial kuadratur menggunakan metode simetri. Awalnya konsep ini sangat konkret terkait dengan aliran persamaan diferensial di $\mathbb{R}^n$. Pada awal abad kedua puluhan pandangan abstrak teori grup Lie muncul, dimulai dari Elie Cartan yang mengerjakan klasifikasi aljabar Lie. Keuntungan digunakannya formulasi abstrak membuat analisis mate-matika menjadi lebih jelas, dan dengan menggunakan metode simetri membuat analisis matematika menjadi lebih sederhana. Teori abstrak ini terkonsentrasi pada pemahaman struktur matematika dalam penyelesaian persamaan diferensial. Persamaan diferensial yang diperoleh diharapkan akan mampu menjelaskan gejala fisika. Banyak gejala fisika yang merupakan proses stokastik, misalnya gerak acak seperti gerak Brown.

Secara matematis, proses stokastik didefinisikan sebagai himpunan peubah acak yang berparameterkan t, dengan t anggota $\{T\}$, himpunan T disebut sebagai himpunan indeks atau ruang parameter bagi proses stokastik. Jadi, proses stokastik merupakan peubah acak (variabel acak) yang dilabeli dengan waktu, kejadiannya tidak dapat diprediksi secara pasti, hanya berupa agihan peluang. Seperti yang telah disebutkan di atas bahwa gerak acak seperti gerak Brown adalah proses stokastik, maka dinamika proses stokastik adalah kurva atau lintasan dalam suatu ruang keadaan (ruang fase) yang mampu menggambarkan dinamika untuk sistem gerak acak. Dinamika suatu sistem fisis dimodelkan dengan kurva-kurva berparameterkan waktu pada ruang keadaan. Kurva-kurva tersebut merupakan penyelesaian bagi suatu persamaan diferensial yang khas untuk setiap model. Persamaan diferensial ini disebut persamaan gerak bagi sistem fisis yang ditinjau. Jadi, dinamika menggambarkan lintasan perjalanan suatu sistem fisis dalam ruang keadaan. Sementara, dari sudut pandang teori grup, dinamika dapat diartikan sebagai realisasi (representasi) grup dinamik (himpunan yang beranggotakan semua bilangan riil disertai dengan operasi penjumlahan biasa) pada ruang keadaan. Oleh karena itu, dinamika suatu sistem fisis dapat diturunkan melalui mekanisme-mekanisme teori grup (Rosyid, 2015).

Salah satu contoh dinamika suatu sistem yang sering ditemukan dalam mekanika klasik adalah dinamika benda tegar. Apabila benda bergerak dan jarak antar partikel tidak berubah maka dapat dikatakan sebagai benda tegar. Dalam kasus ini, teori dalam mekanika klasik mampu menjelaskan sistem ini dikarenakan tidak adanya usikan acak. Namun, untuk gerak benda tegar di bawah pengaruh usikan acak teori klasik tidak mampu lagi menjelaskan sistem tersebut, maka perlu adanya perumusan baru untuk menjelaskan dinamika benda tegar di bawah pengaruh usikan acak tersebut. Terkait permasalahan di atas, kajian gerak acak benda tegar melalui persamaan diferensial stokastik dalam grup ortogonal khusu $(SO(d))$ telah diteliti Liao (1997). Penelitian tersebut merumuskan kecepatan sudut pada benda untuk gerak acak pada keadaan rata-rata dan momentum sudut pada benda tegar. Kajian ini fokus pada gerak rotasi sehingga grup yang dilibatkan adalah grup rotasi, yaitu $SO(d)$. Untuk kasus khusus gerak rotasi tiga dimensi, grup yang dilibatkan adalah $SO(3)$,yaitu grup matriks ortogonal khusus $3\ x\ 3$.

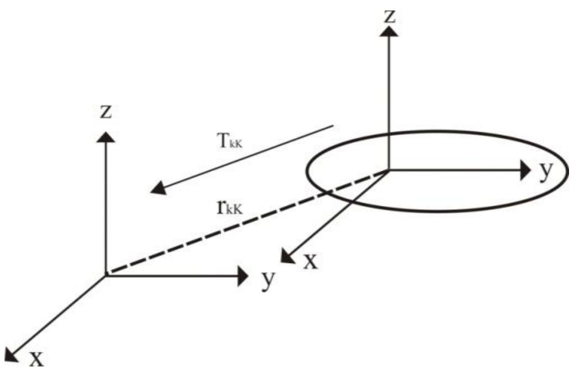
Gerak benda tegar di bawah pengaruh usikan acak juga dikaji menggunakan analisis stokastik khususnya menggunakan kalkulus Stratonovich, sehingga dapat diperoleh perumusan kecepatan sudut rata-rata (Liao dan Wang, 2005). Kalkulus erat kaitanya dengan persamaan diferensial dan integral, maka persamaan integral Stratonovich adalah jawaban bagi persamaan diferensial Stratonovich. Dalam persoalan ini, persamaan diferensial Stratonovich adalah persamaan yang paling cocok untuk menyelesaikan kasus ini. Karena dalam fungsi yang deterministik menurut stokastik, persamaan diferensial Stratonovich dan persamaan diferensial It$\hat{o}$ memiliki jawaban yang sama. Tetapi, perumusanya berbeda.

Pada tahun 1944, Kiyoshi It$\hat{o}$ mengembangkan teori kalkulus stokastik (Integral stokastik dan persamaan diferensial stokastik). Integral It$\hat{o}$ merupakan solusi tunggal bagi sistem gerak Brown (Ikeda dan Watanabe, 1989). Gerak Brown di sini, adalah variabel yang menggambarkan keacakan bagi fungsi yang memiliki usikan acak yang besar. Maka, jelaslah dengan menggunakan kalkulus stokastik baik yang diformulasikan oleh It$\hat{o}$ ataupun Stratonovich, dapat diperoleh perumusan yang lebih umum untuk dinamika sistem fisis, khususnya dinamika benda tegar.

Dalam banyak buku teks, penjelasan gerak benda tegar meliputi gerak rotasi dan gerak translasi. Gerak rotasi dijelaskan menggunakan persamaan Euler, sedangkan gerak translasi dijelaskan menggunakan hukum II Newton. Penggambaran gerak benda tegar sering kali dijelaskan secara terpisah, maka untuk mendapatkan persamaan tunggal yang elegan bagi gerak benda tegar dapat diturunkan mengunakan formulasi grup Lie. Sehingga, penelitian yang telah dilakukan oleh Liao dan Wang (2005) dapat diperluas ke grup $SE(3)$. Grup $SE(3)$ adalah grup Euclide khusus yang dapat dituliskan sebagai $SO(3) \times \mathbb{R}^3$. Penelitian ini berusaha menjelaskan perumusan gerak benda tegar di bawah pengaruh usikan acak tidak hanya menjelaskan gerak rotasi tetapi juga gerak translasi melalui persamaan diferensial stokastik.

1.1 Dinamika Benda Tegar

Konfigurasi benda tegar yang terkait dengan konfigurasi acuan dijelaskan melalui suatu anggota $T = (R, r) \in SE(3)$. Jika k adalah suatu kerangka koordinat tetap dan K adalah suatu ke-rangka koordinat yang melekat pada benda, maka dapat ditulis $T_{kK} = (R_{kK}, r_{kK})$ merupakan konfigurasi bagi K relatif terhadap k.



Gambar 1: Kerangka-kerangka Koordinat untuk Menentukan Gerak Tegar (diadaptasi dari Murray, Li, dan Sastry (1994)).

Aljabar Lie bagi $SE(3)$ dituliskan sebagai $se(3)$, yang diidentifikasikan sebagai ruang vektor enam dimensi $(w, v) \in \mathbb{R}^6$, dengan $w \in so(3)$. Aljabar Lie bagi $SO(3)$ adalah $so(3)$. Aksi ajoin bagi $SE(3)$ pada $se(3)$ dituliskan sebagai pemetaan

$$Ad : SE(3) \times se(3) \to se(3)$$

$$: (T, \xi) \mapsto Ad(T, \xi) = Ad_T \xi,$$

yang dapat didefinisikan sebagai $Ad_T \xi = T \xi T^{-1}$.

Kecepatan ruang dan benda secara fisika dengan seketika diinterpretasikan sebagai kecepatan rotasi dan translasi yang ditulis relatif terhadap kerangka benda atau ruang berturut-turut. Keduanya dihubungkan melalui aksi ajoin bagi $SE(3)$ pada $se(3)$. Yakni, jika V_K adalah kecepatan benda untuk suatu gerak tegar $T\ (t)$, maka kecepatan ruang dapat dituliskan sebagai $V_k = Ad_T\, V_K$.

Misalkan k dan K adalah dua kerangka koordinat yang berbeda yang melekat pada suatu benda tegar yang sama, dan $T_K, T_k \in SE(3)$ adalah wakilan orientasi dan posisi bagi dua kerangka yang terkait dengan suatu kerangka inersia. Kecepatan umum bagi kerangka K dan k memiliki hubungan sebagai $V_K = Ad_{T_{Kk}} V_k$. Sehingga $V_K = Ad^{-1}_{T_{kK}} V_k$ atau dapat dituliskan sebagai $V_k = Ad_{T_{kK}} V_K$.

Momentum umum benda tegar didefinisikan sebagai $L = \mathcal{J}V$, dengan $\mathcal{J}$ adalah inersia umum dan V adalah kecepatan umum bagi benda yang diungkapkan dalam kerangka koordinat yang melekat pada benda. Misalkan L_k dan L_K momentum umum bagi benda tegar yang diungkapkan dalam kerangka benda yang berbeda, yaitu kerangka k dan K. Aturan untuk trans-formasi momentum umum, yaitu $L_K = Ad^* L_k$. Karena ortogonal, maka $L_K = Ad^*_{T_{kK}} L_k = Ad^{-1}_{T_{kK}} L_k$. Sehingga dapat juga ditulis sebagai $L_k = Ad_{T_{kK}} L_K$.

2. Hasil dan Pembahasan

2.1 Gerak Benda Tegar Dari Formulasi Grup Lie

Dinamika suatu sistem fisis dapat diturunkan melalui mekanisme-mekanisme grup Lie. Oleh karena itu, persamaan gerak bagi suatu benda tegar dapat diperoleh melalui formulasi grup Lie. Grup $SE(3)$ adalah salah satu contoh grup Lie dan juga suatu grup yang merupakan ruang konfigurasi bagi suatu benda tegar yang mengalami gerak rotasi sekaligus translasi. Anggota $SE(3)$ dapat dituliskan sebagai $T = (R, r)$ yang memuat wakilan orientasi matrik R dan translasi (posisi r). Aljabar Lie bagi $SE(3)$ dituliskan sebagai $se(3)$. Aksi ajoin bagi $SE(3)$ pada $se(3)$ adalah pemetaan

$$Ad : SE(3) \times se(3) \rightarrow se(3)$$
$$: (T, \xi) \mapsto Ad(T, \xi) = Ad_T\, \xi.$$

Karena $SE(3)$ adalah grup Lie matriks, maka berlaku $Ad_T\, \xi = T\, \xi T^{-1}$. Peme-taan ajoin mengimbas pemetaan $Ad_T : se(3) \rightarrow se(3)$. Ad_T dapat dipandang sebagai transformasi linier yang didefinisikan oleh matriks 6×6, yaitu

$$Ad_T = \begin{pmatrix} R & 0 \\ [r]R & R \end{pmatrix}.$$

Misalkan k dan K adalah dua kerangka koordinat yang berbeda yang melekat pada suatu benda tegar yang sama, dan $T_K, T_k \in SE(3)$ adalah wakilan orientasi dan posisi bagi dua kerangka yang terkait dengan suatu kerangka inersia. Jika kecepatan umum adalah anggota $se(3)$, maka kecepatan umum bagi kerangka K dan k memiliki hubungan sebagai berikut.

$$Ad_T : se(3) \rightarrow se(3)$$
$$: V_K \mapsto V_k = Ad_T\,(V_K) = Ad_T\, V_K.$$

Jika $T \in SE(3)$ berubah terhadap waktu, maka $T(t)$ adalah lintasan diferensiabel di ruang $SE(3)$ yang dapat mendeskripsikan gerak benda. Dalam hal ini, gerak benda yang dimaksud adalah gerak benda tegar. Selain kecepatan umum, momentum umum juga merupakan anggota dari $se(3)$. Oleh karena itu, momentum umum bagi kerangka K dan k memiliki hubungan sama halnya dengan kecepatan umum, yaitu

$$Ad_T : se(3) \rightarrow se(3)$$
$$: L_K \mapsto L_k = Ad_T(L_K) = Ad_T L_k.$$

Gerak benda tegar dapat dideskripsikan oleh suatu lintasan diferensiabel $T(t)$ anggota $SE(3)$ dengan $T(0) = e$. Misalkan V_k adalah kecepatan umum pada kerangka inersia (ruang) dan V_K adalah kecepatan umum pada benda saat t yang berawal di titik 0. V_k dan V_K adalah anggota $se(3)$ (atau vektor-vektor di dalam $\mathbb{R}^6$) yang dapat didefinisikan oleh

$$\left(\frac{d}{dt}\right) T(t) = V_k T(t) = V_K T(t).$$

Hubungan antara V_k dan V_K adalah $V_k = Ad(T(t))V_K$. Misalkan L_k adalah momentum umum pada ruang dan L_K adalah momentum umum pada benda. L_k dan L_K adalah anggota $se(3)$ (atau vektor-vektor dalam $\mathbb{R}^6$), maka hubungan antara L_k dan L_K adalah

$$L_k = Ad(T(t))L_K.$$

Hubungan antara V_K dan L_K adalah $L_K = \mathcal{J}V_K$, dengan $\mathcal{J}$ adalah operator inersia yang simetris dan definit positif. Misalkan $\mathcal{J}^{-1} = \Lambda$. Untuk benda tegar bebas dengan momentum umum L_k konstan dapat diperoleh persamaan

$$T(t) = T(t)V_K = T(t)\Lambda L_K = T(t)\Lambda[Ad(T(t)^{-1})L_k].$$

Maka, gerak bagi benda tegar bebas dapat ditentukan oleh persamaan diferensial berikut ini:

$$\frac{dT(t)}{dt} = T(t)\Lambda[Ad(T(t)^{-1})Lk],$$

$$dT(t) = T(t)\Lambda[Ad(T(t)^{-1})Lkdt]. \quad (1)$$

2.2 Gerak Benda Tegar Dalam Persamaan Diferensial Stokastik

Gerak bagi benda tegar bebas dapat ditentukan oleh persamaan (1). Suatu model usikan acak dapat menyebabkan suatu perubahan kontinyu dalam konfigurasi benda tegar dan memiliki pengaruh stasioner dan saling bebas terhadap *non-overlapping* interval-interval waktu. Dalam hal ini, usikan acak mengikuti (tunduk) pada gerak Brown dalam ruang momentum sebab usikan yang dimaksud berada dalam ruang momentum. Karena pengaruh usikan acak inilah yang menyebabkan momentum bagi suatu benda tegar mengalami peru-bahan setiap saat. Perubahan momentum yang tidak stabil menyebabkan lintasan gerak suatu benda tegar tidak lurus (dapat dibayangkan zig-zag) akibat benda tegar mengalami gerak rotasi sekaligus translasi. Gerak rotasi terjadi saat usikan tidak menuju pusat, sedangkan gerak translasi terjadi saat usikan menuju ke pusat. Suatu model usikan acak ini dapat diperoleh dengan mengganti $L_k dt$ pada persamaan (1) oleh $L_0 dt + \sum_{i=1}^{3} E_i \circ dB_t^i$,dengan $B = \{B_t^1, B_t^2, B_t^3\}$ adalah gerak Brown tiga dimensi dan $\{E_1, E_2, E_3\}$ adalah suatu basis $se(3)$. Maka, gerak benda tegar dalam kondisi ini merupakan proses stokastik $T(t)$ di $SE(3)$ yang ditentukan oleh persamaan diferensial stokastik berikut ini.

$$dT(t) = T(t)\Lambda[Ad(T(t)^{-1})]\ (L_0 dt + \textstyle\sum_{i=1}^{3} E_i \circ dB_t^i),$$

$$dT(t) = \textstyle\sum_{i=1}^{3} T\,(t)\Lambda[Ad(T(t)^{-1})E_i \circ dB_t^i] + T(t)\Lambda[Ad(T(t)^{-1})L_0 dt].$$

Selanjutnya hendak ditulis sebagai

$$dT_t = \textstyle\sum_{i=1}^{3} T_t\,\Lambda\left[Ad(T_t)^{-1})E_i \circ dB_t^i\right] + T_t\Lambda[Ad(T_t)^{-1})L_0 dt], \quad (2)$$

dengan keadaan awal $T_0 = e$ (identitas). Proses T_t adalah gerak bagi benda tegar dengan suatu momentum umum awal L_0 di bawah pengaruh usikan gerak Brown B_t. Untuk benda tegar bebas, hubungan antara L_t dan L_0 adalah $L_t = Ad(T_t^{-1})L_0$ adalah momentum umum bagi benda saat *t*.

2.3 Kecepatan Umum Rata-Rata

Lintasan bagi proses T_t hampir pasti tidak diferensiabel dimanapun, karena mengandung suku yang menggambarkan gerak acak. Gerak acak pada persamaan (2) dijelaskan oleh gerak Brown. Selanjutnya, untuk kecepatan umum pada kasus ini tidak dapat didefinisikan dalam keadaan biasa karena yang dihitung adalah gerak yang mengandung gerak acak (tidak teratur), tetapi dapat didefinisikan dalam keadaan rata-rata. Misalkan $T_{t+t'} = T_t \exp(Z_{t'}^t)$ untuk $Z_{t'}^t \in \mathfrak{g}$ dengan $Z_0^t = 0$.

Maka, $Z_{t'}^{t}$ selalu ada dan tunggal, ketika $Z_{t'}^{t}$ dekat dengan 0 dan kasus ini di grup $SE(3)$. $Z_{t'}^{t}$ menunjukan banyaknya gerak rotasi dan translasi benda dari waktu t sampai $t+t'$. Misalkan

$$V_t = \lim_{t' \to 0} \frac{1}{t'} \mathbb{E}(Z_{t'}^{t} | \mathcal{F}_t), \qquad (3)$$

dengan $\mathcal{F}_t$ adalah aljabar-σ yang dibangkitkan oleh gerak Brown saat t. Untuk grup $SE(3)$, $\mathbb{E}(Z_{t'}^{t}|\mathcal{F}_t)$ adalah banyaknya gerak rotasi dan translasi rata-rata dari waktu t sampai $t+t'$. Selanjutnya, V_t disebut kecepatan umum rata-rata pada saat t.

Persamaan diferensial stokastik yang dipenuhi oleh $Z_{t'}^{t}$ dapat diperoleh sebagai proses dalam waktu t. Misalkan $L_t = Ad(T_t^{-1})L_0$ dan $E_{t,i} = Ad(T_t^{-1})E_i$. Secara sederhana, $\Lambda(L)$ dapat ditulis ΛL untuk $L \in \mathfrak{g}$, sehingga persamaan (2) dapat ditulis sebagai

$$dT_t = \sum_{i=1}^{n} T_t \Lambda E_{t,i} \circ dB_t^i + T_t \Lambda L_t dt, \qquad (4)$$

dan $dT_t^{-1} = \sum_{i=1}^{n} \Lambda E_{t,i} T_t^{-1} \circ dB_t^i + \Lambda L_t T_t^{-1} dt$.

Dengan menggunakan kalkulus Strato-novich yang dituliskan sebagai $\circ\, dT_t T_t^{-1} + T_t \circ dT_t^{-1} = d(T_t T_t^{-1}) = 0$, maka akan diperoleh

$$d(T_t^{-1})L = \sum_{i=1}^{n} [Ad(T_t^{-1})L, \Lambda E_{t,i}] \circ dB_t^i + [Ad(T_t^{-1})L, \Lambda L_t] dt \qquad (5)$$

Diferensial bagi pemetaan eksponensial untuk $L \in \mathfrak{g}$ adalah pemetaan linier $Dexp(L): T_L\mathfrak{g} \to T_{\exp(L)}G$. Berdasarkan Tteorema 1.7 Bab II (Helgason, 1978) , jika $Y \in \mathfrak{g}$ dipandang sebagai suatu anggota bagi $T_L\mathfrak{g}$, maka

$$Dexp(L)Y = e^L \Gamma(L)Y, \qquad (6)$$

dengan

$$\Gamma(L) = \frac{id_{\mathfrak{g}} - e^{-ad(L)}}{ad(L)}$$

$$= id_{\mathfrak{g}} - \frac{1}{2!} ad(L) + \frac{1}{3!} ad(L)^2 - \cdots, \qquad (7)$$

dan $ad(L) = \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ yang didefinisikan oleh $ad(L)Y = [L, Y]$ (*Lie bracket*).

Dengan menerapkan diferensial Stratonovich pada $T_{t+t'} = T_t \exp(Z_{t'}^{t})$ yang dapat dipandang sebagai proses dalam waktu t' dengan $t \in \mathbb{R}$, maka akan diperoleh $dT_{t+t'} = T_t \exp(Z_{t'}^{t})\, \Gamma(Z_{t'}^{t}) \circ dZ_{t'}^{t}$. Pada sisi lain,

$$dT_{t+t'} = \sum_{i=1}^{n} T_{t+t'} \Lambda E_{t+t',i} \circ dB_{t+t'}^i + T_{t+t'} \Lambda L_{t+t'} dt'.$$

Dari dua persamaan di atas akan diperoleh

$$T_t\, exp(Z_{t'}^{t})\, \Gamma(Z_{t'}^{t}) \circ dZ_{t'}^{t} = \sum_{i=1}^{n} T_{t+t'} \Lambda E_{t+t',i} \circ dB_{t+t'}^i + T_{t+t'} \Lambda L_{t+t'} dt'$$

$$dZ_{t'}^{t} = \Gamma(Z_{t'}^{t})^{-1} \sum_{i=1}^{n} \Lambda E_{t+t',i} \circ dB_{t+t'}^i + \Gamma(Z_{t'}^{t})^{-1} \Lambda L_{t+t'} dt'$$

$$dZ_{t'}^{t} = \sum_{i=1}^{n} \Gamma(Z_{t'}^{t})^{-1} \Lambda E_{t+t',i} \cdot dB_{t+t'}^i + \Gamma(Z_{t'}^{t})^{-1} \Lambda L_{t+t'} dt' + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \Gamma(Z_{t'}^{t})^{-1} \Lambda(E_{t+t',i}) \cdot$$

$$dB_{t+t'}^i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} D\Gamma(Z_{t'}^{t})^{-1} (dZ_{t'}^{t}, \Lambda E_{t+t',i}) \cdot dB_{t+t'}^i. \qquad (8)$$

dengan $dB_{t+t'}^i$ tanpa bundaran adalah diferensial It$\hat{o}$. Sementara, untuk sembarang semimartinggil kontinyu L_t dan Y_t, $dL_t \cdot dY_t$ merupakan diferensial bagi kumpulan proses kovarian kuadratik.

$$dZ_{t'}^{t} = \sum_{i=1}^{n} \Gamma(Z_{t'}^{t})^{-1} \Lambda E_{t+t',i} dB_{t+t'}^i + \Gamma(Z_{t'}^{t})^{-1} \Lambda L_{t+t'} dt' + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \Gamma(Z_{t'}^{t})^{-1}$$

$$\Lambda\left(dE_{t+t',j}\right)\cdot dB^{j}_{t+t'}+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}D\Gamma\left(Z^{t}_{t'}\right)^{-1}\left(dZ^{t}_{t'},\Lambda E_{t+t',j}\right)\cdot dB^{j}_{t+t'}\,. \quad (9)$$

Karena $Z^t_0 = 0$, maka $Z^t_{t'}$ bernilai sama dengan integral $\int_0^{t'}$ untuk persamaan (9).

Secara khusus, $D\Gamma(Z)(L,L) = O(||Z||)$ (lebih jelas lihat (Liao dan Wang, 2005).

$$\sum_{i,j=1}^{n} D\Gamma(Z^t_u)^{-1}\left(\Gamma(Z^t_u)^{-1}\Lambda E_{t+u,i},\Lambda E_{t+u,j}\right)a_{ij}$$

$$= -\sum_{i,j=1}^{n}\Gamma(Z^t_u)^{-1}\,D\Gamma(Z^t_u)^{-1}\left(\Gamma(Z^t_u)^{-1}\Lambda E_{t+u,i},\Gamma(Z^t_u)^{-1}\Lambda E_{t+u,j}\right)a_{ij}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\Gamma(Z^t_u)^{-1}\{[\Gamma(Z^t_u)^{-1}\Lambda E_{t+u,i},\Gamma(Z^t_u)^{-1}\Lambda E_{t+u,j}]+O\left(\left||Z^t_u|\right|\right)\}a_{ij}$$
$$= O\left(\left||Z^t_u|\right|\right).$$

Oleh karena itu, integral bagi suku terakhir pada sisi kanan persamaan (9) sama dengan $\int_0^{t'} O(\left||Z|\right|)\ du$. Integral bagi suku pertama adalah suatu integral Itô, dan karena integrannya terbatas, maka integrannya lenyap setelah diambil ekspektasinya. Sementara, untuk ketiga suku lainya dapat diperoleh ekspektasinya sebagai berikut.

$$\frac{1}{t'}\mathbb{E}\left(Z^t_{t'}\middle|\mathcal{F}_t\right) = \mathbb{E}[\frac{1}{t'}\int_0^{t'}\Gamma(Z^t_u)^{-1}\,\Lambda L_{t+u}du|\mathcal{F}_t + \mathbb{E}\{\frac{1}{t'}\int_0^{t'}\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\Gamma(Z^t_u)^{-1}$$
$$\Lambda[\Lambda E_{t+u,i},\Lambda E_{t+u,j}]a_{ij}du|\mathcal{F}_t\} + \mathbb{E}\left[\frac{1}{t'}\int_0^{t'}O\left(\left||Z^t_u|\right|\right)\ du\middle|\mathcal{F}_t\right],$$

$$\frac{1}{t'}\mathbb{E}\left(Z^t_{t'}\middle|\mathcal{F}_t\right) = \mathbb{E}\{\Lambda L_{t+t'}|\mathcal{F}_t\} + \mathbb{E}\{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\Lambda\ [E_{t+t',i},\Lambda E_{t+t',j}]a_{ij}$$

$$\frac{1}{t'}\mathbb{E}\left(Z^t_{t'}\middle|\mathcal{F}_t\right) = \Lambda L_t + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\Lambda\,[E_{t,i},\Lambda E_{t,j}]a_{ij} \quad (10)$$

yang konvergen menuju

$$\Lambda L_t + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\Lambda\,[E_{t,i},\Lambda E_{t,j}]a_{ij}$$

untuk $t \to 0$. Kecepatan umum rata-rata dapat dituliskan sebagai.

$$V_t = \Lambda Ad(T_t^{-1})L_0 + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\ \Lambda[Ad(T_t^{-1})E_i,\Lambda Ad(T_t^{-1})E_j].$$

2.4 Stabilitas

Proses T_t adalah proses difusi di G yang dibangkitkan oleh pembangkit $\mathcal{I}$. Pembangkit $\mathcal{I}$ dapat ditulis sebagai $\mathcal{I} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\ U_iU_i + U_0$, dengan $U_i(T) = T\,[\Lambda Ad(T)E_{\boldsymbol{i}}]$ dan $U_0 = T[\Lambda Ad(T)L_0]$ untuk $T \in G$. Misalkan P_t adalah semigrup transisinya. Suatu ukuran peluang μ pada G disebut ukuran stasioner bagi proses difusi T_t jika $\int_G \rho\,(dx)P_t(x,\cdot) = \rho$ untuk sembarang $t > 0$. Ukuran yang digunakan ada-lah ukuran Haar Normal. Usikan dikatakan *non-degenerate* (tidak merosot) jika matrik a_{ij} juga *non-degenerate*. Dalam kasus ini, ρ ukuran stasioner tunggal bagi T_t. Karena G kompak, maka distribusi bagi T_t konvergen menuju ρ secara lemah untuk $t \to \infty$. Sementara, untuk usikan merosot, ukuran stasioner tidak tunggal dan distribusi bagi T_t tidak konvergen menuju ρ.

3. Kesimpulan

Berdasarkan pada penelitian di atas, maka dapat disimpulkan bahwa (i) Persamaan gerak benda tegar dapat diturunkan dari formulasi grup Lie $SE(3)$ yang ditentukan oleh persamaan diferensial berikut ini: $dT(t) = T(t)\Lambda[Ad(T(t)^{-1})L_k dt]$; (ii) Gerak benda tegar dalam hal ini adalah proses stokastik $T(t)$ dalam $SE(3)$ yang ditentukan oleh persamaan diferensial stokastik berikut $dT_t = \sum_{i=1}^{n} T_t\ \Lambda[Ad(T_t^{-1})E_i \circ dB_t^i +\ T_t\Lambda[Ad(T_t^{-1})L_0 dt]$; (iii) kecepatan umum rata-rata bagi benda tegar dapat dituliskan sebagai: $V_t = \Lambda Ad(T_t^{-1})L_0 + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\ \Lambda\left[Ad(T_t^{-1})E_i, \Lambda Ad(T_t^{-1})E_j\right]$; serta (iv) Usikan dikatakan *nondegenerate* (tidak merosot) jika matrik a_{ij} juga *non-degenerate*. Dalam kasus ini, ρ ukuran stasioner tunggal bagi T_t. Karena G kompak, maka distribusi bagi T_t konvergen menuju ρ secara lemah untuk $t \to \infty$. Sementara, untuk usikan mero-sot, ukuran stasioner tidak tunggal dan distribusi bagi T_t tidak konvergen menuju ρ.

Penelitian ini sebatas memperoleh persamaan gerak stokastik benda tegar di ruang konfigurasi $SE(3)$, sehingga penelitian ini masih dapat dikembangkan lebih lanjut, seperti: (i) persamaan gerak stokastik benda tegar tersambung; (ii) komputasi untuk gerak stokastik benda tegar; (iii) komputasi untuk gerak stokastik benda tegar tersambung.

Daftar Pustaka

Helgason, S.. 1978. Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces. Academic Press.

Ikeda, N., Watanabe, S.. 1989. *Stochastic Differential and Diffusi Processes.* New York : North-Holland and Publishing Company Amsterdam. Oxford.

Liao, M.. 1997. Random Motion of a Rigid Body. *J. of Theor. Prob*. 10. 201- 211.

Liao, M., Wang, L.. 2005. Motion of Rigid Body under Random Pertubation. *Electonic Communication in Probability*. 10. 235 - 243.

Murray, R.M., Li, Z., Sastry, S.S.. 1994. *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. CRC Press.

Rosyid, M.F.. 2015. *Aljabar Abstrak Dalam Fisika*. Yogyakarta : Gadjah Mada University Press.