KEKONVERGENAN INTEGRAL HENSTOCK-PETTIS PADA RUANG EUCLIDE R^n

(Henstock-Pettis Integral Convergence in Euclidean Space)

Hairur Rahman[1] dan Soeparna Darmawijaya[2]

[1]Universitas Muhamadiyah Malang
[2]Jurusan Matematika FMIPA UGM, Sekip Utara Yogyakarta

ABSTRAK

Dalam paper ini dibicarakan integral Henstock-Pettis pada ruang Euclide R^n. Pembahasannya meliputi beberapa sifat fungsi terintegral Henstock-Pettis pada ruang Euclide R^n, fungsi primitif, lemma Henstock, dan beberapa teorema kekonvergenannya.

Kata kunci: Integral Henstock, Ruang Euclide R^n, fungsi terintegral Henstock Pettis

ABSTRACT

Henstock-Pettis Integral on the Euclidean Space is discussed in this paper. Discussions cover some properties of Henstock-Pettis integrable function on the Euclidean Space R^n, primitive function, Henstock lemma, and some convergence theorems.

Makalah diterima tanggal 12 Maret 2006

1. PENDAHULUAN

Pada tahun 1914, Perron mengembangkan perluasan lain integral Lebesgue dan menunjukkan bahwa integralnya mempunyai sifat bahwa setiap derivatifnya terintegral pada garis lurus.Selanjutnya Hanstock dan Kurzweil secara terpisah mengitlakkan integral Riemann dengan mengubah konstanta positif d menjadi fungsi positif d dan ternyata integral yang disusun keduanya ekuivalen. Oleh karena itu, integral yang mereka susun terkenal dengan nama Henstock-Kurzweil.

Dari kajian tentang integral Henstock banyak sifat-sifatnya yang telah diungkapkan baik dalam R maupun ruang R^n. Menurut penelitian, masalah mengenai sifat-sifat pada integral Henstock kemungkinan dapat dikembangkan menjadi masalah yang lebih luas dalam integral henstock-Pettis, khususnya sejauh mana sifat-sifat integral Henstock dari fungsi bernilai real dapat dikembangkan ke dalam integral Henstock-Pettis pada ruang Euclide R^n.

Himpunan semua bilangan real dinotasikan dengan R. Untuk bilangan asli n, R^n menyatakan himpunan semua pasangan atas n bilangan real, yaitu :

$$R^n = R\times R\times \ldots \times R \text{ . (} n \text{ faktor)}$$

$$= \left\{ \bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in R, 1 \le i \le n \right\}$$

Untuk setiap $a \in R$ dan $\bar{x}, \bar{y} \in R^n$. Jika A himpunan bagian tak kosong didalam R^n, diameter himpunan A didefinisikan

$$diam(A) = \sup \left\{ \|\bar{x} - \bar{y}\| : \bar{x}, \bar{y} \in A \right\}$$

Untuk $\bar{x} \in R^n$, persekitaran *(neighborhood)* titik $\bar{x}$ dengan jari-jari $r > 0$ dinotasikan dengan $B(\bar{x}, r)$, didefinisikan

$$B(\bar{x},r)=\{\bar{y}:\bar{y}\in R^{n} \text{ dan } \|\bar{x}-\bar{y}\|<r\}.$$

Definisi 1.1 *Diberikan sel* $E \subset R^n$.

(1)Divisi pada sel E adalah koleksi sel berhingga D yang tidak saling tumpang tindih sehingga

$$\bigcup_{D\in D} D = E.$$

(2)Segmentasi pada koleksi sehingga sel-sel C adalah koleksi berhingga sel D yang tidak saling tumpang tindih sehingga memenuhi

(a) Untuk setiap $D\in D$ terdapat sel $C\in C$ sehingga $D\subseteq C$

(b) Untuk setiap $C\in C$ koleksi $\{D\in D : D\subset C\}$ adalah partipasi pada C

Definisi 1.2. *Diberikan fungsi volume* a *pada* R^n*, sel* $E\subset R^n$ *dan E ruang Banach. Fungsi f : E? X dikatakan* ***terintegral-a Henstock pada E terhadap*** a*, ditulis singkat f* $\in$ *H (E,* a*, X) jika terdapat vektor* $A\in X$ *sehingga untuk setiap bilangan* $\in > 0$ *terhadap fungsi positif d pada E dan untuk setiap partisi Perron d-fine* $D=\{(D_1,\bar{x}_1),(D_2,\bar{x}_2),...(D_n,\bar{x}_n)\}$ *pada E berlaku*

$$\left\|A-(D)\sum f(\bar{x}_1)a\right\|=\left\|A-(D)\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_1)a(D_1)\right\|<\in$$

Definisi 1.3. *Diberikan X ruang Banach dan* X^* *ruang dualnya, volume a pada* R^n*, dan E Ì* R^n*. Fumgsi f : E ? X* ***dikatakan terintegral-a Henstock-Pettis pada E****, ditulis singkat dengan f Î HP(E, a), jika untuk setiap* x^*f *terintegral-a Henstock pada A terdapat vektor x(f, A, a) Î X sehingga*

$$x^*(x(f,A,a))=(H)\int_A x^* fda$$

Selanjutnya vektor $x(f,A,a)$ di atas disebut nilai Integral Henstock-Pettis fungsi *f* pada *A* dan ditulis

$$x(f,A,a)=(H)\int_A fda \;,$$

khususnya

$$x(f,E,a)=(HP)\int_E fda\,.$$

Jadi

$$x^*\left((HP)\int_A fda\right)=(H)\int_A x^* fda\;.$$

2. HASIL DAN PEMBAHASAN

Akan dibahas sifat-sifat lanjut dari integral Henstock-Pettis pada ruang Euclide R^n, beberapa kekonvegenan dari integral Henstock-Pettis pada ruang Euclide R^n .

Teorema 2.1. (***Kriteria Cauchy*****)** *Fungsi* $f\in HP(E,a)$ *jika dan hanya jika untuk setiap bilangan Î > 0 terdapat fungsi positif d pada E sehingga jika* $A\subset E$ *sel dan* $D_1=\{(B_1,\bar{x}_1),...,(B_p,\bar{x}_p)\}$ *dan* $D_2=\{(C_1,\bar{x}_1),...,(C_q,\bar{x}_q)\}$ *masing-masing partisi Perron d-fine pada A memenuhi*

$$\left|(D_1)\sum_{i=1}^{p} x^* f(\bar{x}_i)a(B_1)-(D_2)\sum_{k=1}^{q} x^* f(\bar{y}k)a(C_k)\right|<\in$$

untuk setiap $x^*\in X^*$.

Teorema 2.2. *Jika* $f\in HP(E,a)$ *maka* $f\in HP(A,a)$ *untuk setiap sel bagian AÍ E.*

Bukti : Cukup jelas, berdasarkan Definisi 1.3.

Definisi 2.3. *Jika* $f\in HP(E,a)$ *dan J (E) koleksi semua sel bagian di dalam E maka fungsi F : J (E) ? X dengan rumus*

$$F(A)=x(f,A,a)=(HP)\int_A fda,$$

dan $F(\emptyset)=0$*, untuk setiap* $A\in F(E)$ *disebut* ***primitif****-Hp fungsi* f .

Teorema 2.4. *Diberikan fungsi volume α di dalam R^n dan sel $E \subset R^n$. Jika $f \in HP(E,\alpha)$ dengan f sebagai primitif-HP nya dan E_1, E_2, ..., E_p sel-sel di dalam E yang tak saling tumpang tindih dan $E = \bigcup_{k=1}^{p} E_k$ maka*

$$F(E) = \sum_{k=1}^{p} F(E_k) = \sum_{k=1}^{p} x(f, A, \alpha)$$

Bukti: *Karena $f \in HP(E,\alpha)$ dengan primitif-HP fungsi f pada E, $E = \bigcup_{k=1}^{p} E_k$ dengan $E_i^0 \bigcap E_j^0 = \emptyset$ untuk setiap $i \neq j$, diperoleh*

$$\begin{aligned} F(E) &= F\left(\bigcup_{k=1}^{p} E_k\right) \\ &= x\left(f, \left(\bigcup_{k=1}^{p} E_k\right), \alpha\right) \\ &= x(f, E_1, \alpha) + ... + x(f, E_p, \alpha) \\ &= F(E_1) + ... + F(E_p) \\ &= \sum_{k=1}^{p} F(E_k) \\ &= \sum_{k=1}^{p} x(f, A, \alpha). \end{aligned}$$

Selanjutnya berdasarkan Definisi 1.3. maka integral Henstock-Pettis terhadap pada E dapat juga dinyatakan seperti dalam teorema berikut.

Teorema 2.5. *Fungsi $f \in HP(E,\alpha)$ jika dan hanya jika terdapat fungsi adiktif sehingga untuk setiap bilangan $\in > 0$ yang diberikan dan $x^* \in X^*$ dapat ditemukan fungsi positif δ pada E sehingga jika $A \subset E$ sel dan $D = \{(D, \bar{x})\}$ partisi Perron δ-fine pada A berlaku*

$$\left|\sum x^*(f(\bar{x})\alpha(D) - F(D))\right| < \in .$$

Teorema 2.6. ***(Lemma Henstock)*** *Diberikan X ruang Banach dan X^* ruang dualnya, volume α pada R^n dan sel $E \subset R^n$. Jika $f \in HP(E,\alpha)$ dengan primitif F, yaitu untuk setiap bilangan $\in > 0$ dan $x^* \in X^*$ terdapatlah fungsi positif δ pada E sehingga jika $A \subset E$ sel dan $D = \{(D, \bar{x})\}$ partisi Perron δ-fine pada A berlaku*

$$\left|(D)\sum x^*(f(\bar{x})\alpha(D) - F(D))\right| < \in$$

maka untuk setiap jumlahan bagian $\sum_1$ dan $(D)\Sigma$ berlaku

$$\left|(D)\sum_1 x^*(f(\bar{x})\alpha(D) - F(D))\right| < \in$$

Teorema 2.7. ***(Teorema Kekonvergenan Seragam)*** *Diberikan fungsi volume α pada R^n, sel $E \subset R^n$ dan $f_n \in HP(E,\alpha)$ untuk setiap n. Jika untuk setiap sel $A \subset E$ barisan fungsi $\{f_n\}$ konvergen lemah seragam ke suatu fungsi f pada A, maka $f \in HP(E,\alpha)$ dan*

$$x(f, A, \alpha) = \lim_{n \to \infty} x(f_n, A, \alpha).$$

Bukti : *Diberikan $A \subset E$ sel sebarang. Barisan fungsi $\{f_n\}$ konvergen lemah seragam ke f pada A jika untuk setiap bilangan $\in > 0$ dan terdapat bilangan asli $m = m(\in, x^*)$ sehingga jika $n \geq m$ berlaku*

$$\left|x^* f_n(\bar{x}) - x^* f(\bar{x})\right| < \frac{\in}{4\alpha + 1}.$$

Untuk setiap $\bar{x} \in A \subset E$.

Fungsi $f_n \in HP(E,\alpha)$ jika untuk setiap bilangan $\in > 0$ tersebut dan $x^* \in X^*$ terdapat fungsi positif δ_n-fine pada A berlaku

$$\left|x^*\left(x_{(f_n, A, \alpha)}\right) - (D)\sum x^* f_n(\bar{x})\alpha(D)\right| < \in$$

dan

$$\left|(P)\sum x^* f_n(\bar{x})\alpha(D) - (D)\sum x^* f_n(\bar{x})\alpha(D)\right| < \frac{\in}{4}$$

Jika $P = \{(D, \bar{x})\}, D = \{(D, \bar{x})\}$ sebarang partisi Perron δ-fine pada A berlaku

$$\left|(P)\sum x^* f(\bar{x})a(D) - (D)\sum x^* f(\bar{x})a(D)\right|$$
$$\le \left|(P)\sum x^* f(\bar{x})a(D) - (P)\sum x^* f_m(\bar{x})a(D)\right|$$
$$+\left|(P)\sum x^* f_m(\bar{x})a(D) - (D)\sum x^* f_m(\bar{x})a(D)\right|$$
$$+\left|(D)\sum x^* f_m(\bar{x})a(D) - (D)\sum x^* f(\bar{x})a(D)\right|$$
$$< \frac{\in}{4a+1}a(A) + \frac{\in}{4} + \frac{\in}{4a+1}a(A) < \in$$

Hal ini menunjukkan bahwa $x^* f$ terintegral Henstock pada A dan untuk $A \subset E$ sel di atas jadi terdapat vektor $x(f, A, a) \in X$ sehingga

$$x^*\left(x_{(f,A,a)}\right) = (H)\int_A x^* f da$$

Dengan kata lain, $f \in HP(E, a)$. Selanjutnya, karena $f \in HP(E, a)$. Jadi terdapat fumgsi positif δ_1 pada E sehingga untuk $A \subset E$ sel dan jika $= \{(D, \bar{x})\}$ partisi Perron δ_1-fine pada A berlaku

$$\left|x^*\left(x_{(f,A,a)}\right) - (Q)\sum x^* f(\bar{x})a(D)\right| < \in$$

Untuk setiap n tetap dan $n \ge m$, dipilih $d(\bar{x}) = \min\{d_1(\bar{x}), d_n(\bar{x})\}$ untuk setiap $\bar{x} \in E$. Untuk A$\subset$ E sel di atas dan jika J sebarang partisi Perron pada A, diperoleh

$$\left|x^*\left(x_{(f,A,a)}\right) - x^*\left(x_{(f_n,A,a)}\right)\right|$$
$$\le \left|x^*\left(x_{(f,A,a)}\right) - (J)\sum x^* f(\bar{x})a(D)\right|$$
$$+\left|(J)\sum x^* f(\bar{x})a(D) - (J)\sum x^* f_n(\bar{x})a(D)\right|$$
$$+\left|(J)\sum x^* f_n(\bar{x})a(D) - x^*\left(x_{(f_n,A,a)}\right)\right|$$
$$< \frac{\in}{4} + \frac{\in}{4a(A)+1}a(A) + \frac{\in}{4} < \in$$

Dengan kata lain terbukti

$$x_{(f,A,a)} = \lim_{n\to\infty} x_{(f_n,A,a)}$$

Teorema 2.8. (Teorema kekonvergenan Monoton) *Diberikan fungsi volume a pada R^n, sel E Ì R^n, dan $f_n \in HP(E, a)$ untuk setiap n, dan $\{f_n\}$ monoton lemah pada E. Jika untuk setiap sel A Ì E barisan fungsi $\{f_n\}$ konvergen lemah ke f pada A dan untuk setiap $x^* \in X^*$, $\lim_{n\to\infty} x^*\left(x_{(f_n,A,a)}\right)$ ada maka $f \in HP(E, a)$ dan*

$$f_{(f,A,a)} = \lim_{n\to\infty} x_{(f_n,A,a)}.$$

Bukti : *Diambil sebarang bilangan $\in > 0$ dan $x^* \in X^*$. Cukup dibuktikan untuk kasus barisan fungsi $\{f_n\}$ yang naik monoton lemah pada A untuk setiap AÌ E caranya sama. Menurut yang diketahui terdapat $\bar{a} = \lim_{n\to\infty} x^*\left(x_{(f_n),A,a}\right)$. Karena barisan fungsi $\{f_n\}$ naik monoton lemah pada A, maka barisan $\{x_{(f_n,A,a)}\}$ naik monoton lemah dengan $\bar{a}$ sebagai batas atas terkecilnya. Jadi untuk bilangan Î > 0 tersebut dan x^* Î X^*, dapat dipilih bilangan asli $n_0 = n_0$ (Î, x^*) sehingga jika n ³ n_0 berlaku*

$$\left|\bar{a} - x^*\left(x_{(f,A,a)}\right)\right| < \frac{\in}{4}$$

Karena barisan fungsi $\{f_n\}$ konvergen lemah f pada A, maka untuk setiap bilangan $\in > 0$ di atas, $x^* \in X^*$ dan $\bar{x} \in A \subset E$. Terdapat bilangan asli $m_o = m_o(\in, x^*, \bar{x})$ sehingga jika n ³m_o berlaku

$$\left|x^* f(\bar{x}) - x^* f_n(\bar{x})\right| < \frac{\in}{4a(A)+1}$$

Karena f_n Î*HP(E,a)* untuk setiap n, maka untuk setiap bilangan $\in > 0$ di atas dan x^* ÎX^* terdapat fungsi positif δ_n pada E sehingga untuk A Ì E. sel di atas dan untuk setiap partisi Perron δ_n-fine $D_n = \{(D, \bar{x})\}$ pada A berlaku

$$\left|(D_n)\sum x^* f(\bar{x})a(D) - x^*\left(x_{(f,A,a)}\right)\right| < \frac{\in}{2^{n+1}}$$

Dibentuk fungsi positif δ pada E dengan rumus

$$d(\bar{x}) = d_{m(\in, x^* \bar{x})}$$

untuk setiap $\bar{x} \in E$ dan x^* Î X^* dengan $m(\in, x^*, \bar{x}) = \max\{n_o(\in, x^*), m_o(\in, x^*, \bar{x})\}$. Jadi untuk *A* Ì *E* sel di atas dan jika $D = \{(D_1, \bar{x}_1), (D_2, \bar{x}_1), \ldots (D_p, \bar{x}_p)\}$ Partisi Perron δ-fine pada *A* berlaku

$$\left|(D)\sum x^* f(\bar{x}) a(D) - \bar{a}\right| = \left|\sum_{i=1}^{p} x^* f(\bar{x}_i) a(D_i)\right|$$

$$\leq \left|\sum_{i=1}^{p} x^* \left\{ f(\bar{x}_i) a(D_i) - f_{m(\in, x^*, \bar{x}_i)}(\bar{x}_i) a(D_i) \right\}\right|$$

$$+ \left|\sum_{i=1}^{p} \left\{ x^* f_{m(\in, x^*, \bar{x}_i)}(\bar{x}_i) a(D_i) - x^* \left(x_{\left(f_{m(\in, x^*, \bar{x}_i)}, D_i, a\right)} \right) \right\}\right|$$

$$+ \left|\sum_{i=1}^{p} x^* \left(x_{\left(f_{m(\in, x^*, \bar{x}_i)}, D_i, a\right)} \right) - \bar{a}\right|$$

$$< \sum_{i=1}^{p} \left| x^* f(\bar{x}_i) - x^* f_{m(\in, x^*, \bar{x}_i)}(\bar{x}_i) \right| a(D) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{p} \left| x^* f_{m(\in, x^*, \bar{x}_i)}(\bar{x}_i) a(D) - x^* \left(x_{\left(f_{m(\in, x^*, \bar{x}_i)}, D_i, a\right)} \right) \right|$$

$$+ \left|\sum_{i=1}^{p} x^* \left(x_{\left(f_{m(\in, x^*, \bar{x}_i)}, D_i, a\right)} \right) - \bar{a}\right|$$

$$< \frac{\in}{4a(A)+1} \sum_{i=1}^{p} a(D_i) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\in}{2^{n+1}} + \frac{\in}{4} < \frac{\in}{4} + \frac{\in}{2} + \frac{\in}{4} = \in$$

Dari uraian di atas berarti $x^* f$ terintegral Henstock pada *E* dan untuk sel *A* Ì *E* di atas terdapat vektor $x_{(f, A, a)} \in X$ sehingga

$$x^*\left(x_{(f, A, a)}\right) = (H)\int_A x^* f da$$

Jadi $f \in HP(E, a)$, dan

$$x^*\left(x_{(f, A, a)}\right) = \lim_{n \to \infty} x^*\left(x_{(f_n, A, a)}\right) = \bar{a}$$

Dengan kata lain,

$$x_{(f, A, a)} = \lim_{n \to \infty} x_{(f_n, A, a)}$$

Teorema 2.9. ***(Lemma Fatou)*** *Diberikan fungsi volume a pada R^n , dan sel E Ì R^n fungsi $f_n \in HP(E, a)$ untuk setiap n. Jika untuk setiap sel A Ì E barisan fungsi $\{f_n\}$ konvergen lemah ke fungsi f pada A dan $x^* f_n(\bar{x}) \geq 0$ h.d pada A untuk setiap n maka*

$$\boldsymbol{x}^*\left(\boldsymbol{x}_{(f, A, a)}\right) \leq \liminf \ \boldsymbol{x}^*\left(\boldsymbol{x}_{(f_n, A, a)}\right)$$

Bukti : Diberikan *A* Ì *E* sel sebarang. Dibentuk fungsi h_n untuk setiap *n* dengan rumus

$$h_n(\bar{x}) = \inf_{i \geq n} f_i$$

untuk setiap $\bar{x} \in A \subset E$. Oleh karena itu untuk setiap sel *A* Ì *E* di atas diperoleh barisan fungsi naik monoton lemah $\{h_n\}$ pada *A* dan $x^* h_n(\bar{x}) \leq x^* f_n(\bar{x})$ untuk setiap $\bar{x} \in A \subset E$ dan $x^* \in X^*$. Selanjutnya ,

$$\lim_{n \to \infty} x^*\left(x_{(h_n, A, a)}\right) \leq \lim_{n \to \infty} x^*\left(x_{(f_n, A, a)}\right)$$

dan barisan fungsi $\{h_n\}$ konvergen lemah ke *f*. Karena $\lim_{n \to \infty} x^*\left(x_{(h_n, A, a)}\right)$ ada, maka menurut Teorema Kekonvergenan Monoton, $f \in HP(E, a)$ dan

$$x^*\left(x_{(f, A, a)}\right) = \lim_{n \to \infty} x^*\left(x_{(h_n, A, a)}\right) \leq \liminf x^*\left(x_{(f_n, A, a)}\right)$$

dengan kata lain,

$$x\left(x_{(f, A, a)}\right) \leq \liminf x^*\left(x_{(f_n, A, a)}\right)$$

Akibat dari *Lemma Fatou* ini diperoleh Teorema Kekonvergenan Terdominasi Lebesgue, disajukan berikut ini.

Teorema 2.10. (Teorema Kekonvergenan Terdominasi lebesgue) *Diberikan fungsi volume a pada R^n, dan sel $E \subset R^n$* dan $9, f_n \in HP(E, a)$. *Jika untuk setiap sel A Ì E barisan $\{f_n\}$ konvergen lemah ke f pada A dan $\left|x^* f_n(\bar{x})\right| \leq x^* 9(\bar{x})$ untuk setiap n, x^* Î X^* dan $\bar{x} \in A$ maka, $f \in HP(E, a)$ dan*

$$x_{(f, A, a)} = \lim_{n \to \infty} x_{(f_n, A, a)}$$

Bukti : Diberikan *A* Ì *E* sel sebarang. Karena $x^* f_n(\bar{x}) = x^* f(\bar{x})$ untuk setiap $\bar{x} \in A \subset E, x^* \in X^*$ dan $\left|x^* f_n(\bar{x})\right| \leq x^* 9(\bar{x})$ untuk setiap n, diperoleh $x^*\vartheta(\bar{x}) - x^* f_n(\bar{x}) \geq 0$ dan barisan $\{x^*(\vartheta - f_n)\}$ konvergen ke $(\vartheta - f)$ pada A. Oleh karena itu menurut Lemman Fatou,

$$x^*\left(x_{(\vartheta - f, A, a)}\right) \leq \liminf x^*\left(x_{(\vartheta - f_n, A, a)}\right)$$

Karena $-x^*\vartheta(\bar{x}) \leq x^* f(\bar{x}) \leq x^*\vartheta(\bar{x})$ utuk setiap $\bar{x} \in A \subset E, x^* \in X^*$, dan $\vartheta \in HP(E, a)$, maka $f \in HP(E, a)$ dan

$$\begin{aligned}
0 &\leq x^*\left(x_{(\vartheta, A, a)}\right) - x^*\left(x_{(f, A, a)}\right) = x^*\left(x_{(\vartheta - f, A, a)}\right) \\
&\leq \liminf x^*\left(x_{(\vartheta - f_n), A, a}\right) \\
&= \liminf\left\{x^*\left(x_{(\vartheta, A, a)}\right) - x^*\left(x_{(-f_n, A, a)}\right)\right\} \\
&= \liminf\left\{(H)\int_A x^*\vartheta da + \liminf (H)\int_A - x^* f_n da\right\} \\
&= (H)\int_A x^*\vartheta da + \liminf (H)\int_A - x^* f_n da \\
&= (H)\int_A x^*\vartheta da - \limsup (H)\int_A x^* f_n da \\
&= x^*\left(x_{(\vartheta, A, a)}\right) - \limsup x^*\left(x_{(f_n, A, a)}\right)
\end{aligned}$$

Dari sini diperoleh,

$$\text{Lim sup } x^*\left(x_{(f_n, A, a)}\right) \leq \left(x_{(f, A, a)}\right) \tag{1}$$

Selanjutnya untuk $x^*\vartheta(\bar{x}) + x^* f_n(\bar{x}) \geq 0$ diperoleh

$$\begin{aligned}
0 &\leq x^*\left(x_{(\vartheta, A, a)}\right) + x^*\left(x_{(f, A, a)}\right) = x^*\left(x_{(f + \vartheta, A, a)}\right) \\
&\leq \liminf x^*\left(x_{(f_n + \vartheta, A, a)}\right) \\
&= \liminf\left\{x^*\left(x_{(f_n, A, a)}\right) + x^*\left(x_{(\vartheta, A, a)}\right)\right\} \\
&= \liminf\left\{(H)\int_A x^* f_n da + (H)\int_A x^*\vartheta da\right\} \\
&= \liminf (H)\int_A x^* f_n da + (H)\int_A x^*\vartheta da \\
&= \liminf (H)\int_A x^* f_n da + (H)\int_A x^*\vartheta da \\
&= \liminf x^*\left(x_{(f_n, A, a)}\right) + x^*\left(x_{(\vartheta, A, a)}\right)
\end{aligned}$$

atau

$$\left(x_{(f, A, a)}\right) \leq \liminf x^*\left(x_{(f_n, A, a)}\right) \tag{2}$$

dari (1) dan (2) diperoleh

$$x^*\left(x_{(f, A, a)}\right) = \lim_{n \to \infty} x^*\left(x_{(f_n, A, a)}\right) = \bar{a}$$

dengan kata lain,

$$x_{(f, A, a)} = \lim_{n \to \infty} x_{(f_n, A, a)}$$

Teorema 2.11. (Teorema Kekonvergenan Terbatas). *Diberikan fungsi volime a pada R^n, dan sel $E \subset R^n$ dan $\vartheta, f_n \in HP(E, a)$. Jika untuk setiap sel $A \subset E$ barisan $\{f_n\}$ konvergen lemah ke f pada A dan $\left|x^* f_n(\bar{x})\right| \leq M$ untuk setiap $n, x^* \in X^*$ dan $\bar{x} \in A$ maka, $f \in HP(E, a)$ dan*

$$x_{(f, A, a)} = \lim_{n \to \infty} x_{(f_n, A, a)}$$

4. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan dalam bab-bab sebelumnya kesimpulan bahwa beberapa sifat integral Henstock masih berlaku untuk integral Henstock-Pettis pada ruang Euclide R^n.

Demikian juga untuk teorema kekonvergenan integral Henstock, yaitu Teorema Kekonvergenan Seragam, Teorema Kekonvergenan Monoton, Lemma Fatau, Teorema Kekonvergenan Tedominasi Lebesgue, dan Teorema Kekonvergenan terbatas masih berlaku untuk integral Henstock-Pettis pada ruang Euclide R^n.

Teori integral Henstock-Pettis dalam tulisan ini dapat dikembangkan antara lain kajian mengenai sifat-sifat primitif fungsi terintegral Henstock-Pettis pada ruang Euclide R^n, dan aplikasi integral Henstock-Pettis pada ruang Euclide R^n serta aplikasi pada ilmu-ilmu atau bidang fisika dan kimia.

DAFTAR PUSTAKA

Dharmawidjaya, S., 2003, *On The Bounded Interval Functions*, Proccedings of the International Conference 2003 On Mathematics And Its Application, SEAMS-Gadjah Mada university, Universitas Gadjah Mada, Indonesia.

Indarti, Ch.R., 2002, *Integral Henstock-Kurzweil pada ruang Euclide R^n berdimensi-n*, Disertai, Universitas Gadjah Mada, Indonesia.

Gordon, R.A., 1994, *The Integral of Lebesgue, Denjoy, Perron and Henstock*, Mathematical Society, USA.

Guoju, Ye dan Tianqing, 2001, *On Henstock-Dunford and Henstock-Pettis Integral*, IJMMS, 25:7, Hindawi Publishing Corp. pp 467-478.

Guoju, Ye dan, Swabik.S, 2001, *The MacShane and The Weak. MacShane Integral of Banach Space value Funchen Define On R^n*, Mathematical Notes, Miscole, Vol, 2., No, 2., pp127-136.

Guoju, Ye, and Swabik.S, 2004, *Topics in Banach Space Integration*, Manuscrip in Preparation.

Indarti, Ch.R., 2002, *Integral Henstock-Kurzweil pada ruang Euclide R^n berdimensi-n*, Disertai, Universitas Gadjah Mada, Indonesia.

Rahman, Hairur, 2005, *Integral Henstock-Pettis pada ruang Euclide R^n*, Tesis Universitas Gadjah Mada, Indonesia.

Lee, P.Y., 1989, *Lanzhou Lectures On Henstock Integration*, Word Scientific, Singapore.

Lee, P.Y. dan Vborn, R., 2000, *Integral : An Easy Approach after Kurzweil and Henstock*, Cambridge University Press.

Preffer, W.F., 1993, *The Riemann Approach to Integration*, Cambridge University Press, New York, USA.

Royden, H.L., 1989, *Real Analysis*, third edition, Macmillan Publishing Company, New York, USA.

Swabik.S. dan Guoju., Ye, 1991, *The macshe and The Pettis Integral of Banach Space value Function defined on R^n*, Chzech, Math Journal.