ESTIMASI VALUE-AT-RISK DENGAN PENDEKATAN EXTREME VALUE THEORY-GENERALIZED PARETO DISTRIBUTION (STUDI KASUS IHSG 1997-2004)

(Value-at-risk Estimation with the Extreme Value Theory-generalized Pareto Distribution Approximation (IHSG 1997-2004 case study))

Rossa Hastaryta dan Adhitya Ronnie Effendie

Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta, Indonesia

ABSTRAK

Dalam paper ini, akan diperkenalkan suatu metode dalam perhitungan VaR yaitu VaR-GPD. Kelebihan metode ini adalah pendekatannya bahwa data mengikuti distribusi GPD (Generalized Pareto Distribution) yang mengakomodasi bentuk distribusi empiris data yang cenderung memiliki ekor gemuk (*heavy tail*).

Kata kunci: Extreme value theory, Generalized Pareto distribution, Value at risk

ABSTRACT

A methods to calculate VaR (*i.e* VaR-GPD) will be presented in this paper. The advantage of such a method is on its approach that the data follow GPD (Generalized Pareto Distribution) distribution which accommodates the form of empirical data distribution having heavy tail.

Keywords : Extreme value theory, Generalized Pareto distribution, Value at risk

Makalah diterima tanggal 12 March 2006

1. PENDAHULUAN

Setiap perusahaan terutama yang bergerak di bidang keuangan/finanasial ataupun institusi keuangan sangat rentan terhadap resiko. Sejarah mencatat sejak tahun 1987-1998 kerugian pasar keuangan turunan (*financial derivative*) mencapai 28 juta dollar. Kerugian terbesar terjadi pada tahun 1993-1995 ketika Orange County, Showa Shell, Metallegellschaft, dan Barings Bank merugi masing-masing mencapai lebih dari 1,3 juta dollar.

Bencana keuangan tersebut mendorong upaya pengendaliaan resiko yang lebih baik, serta penelitian tentang metode dalam mengukur resiko yang ada. Secara umum, resiko keuangan dapat dikategorikan menjadi resiko pasar, resiko kredit, resiko likuiditas, resiko operasional dan resiko hukum. Salah satu metode yang berkembang pesat dan sangat populer dalam mengukur resiko pasar adalah *Value-at-Risk* (VaR).

Studi mengenai ekor distribusi menunjukkan bahwa sebagian besar data runtun waktu finansial memiliki ekor distribusi yang gemuk (*heavy-tail*), yaitu ekor distribusi turun secara lambat bila dibandingkan dengan distribusi normal. Implikasinya adalah, peluang terjadinya nilai ekstrim, contohnya dalam hal resiko: terjadinya bencana keuangan (*financial disaster*), akan lebih besar daripada pemodelan dengan distribusi normal.

2. EXTREME VALUE THEORY (EVT)

EVT secara luas digunakan dalam upaya menaksir terjadinya nilai ekstrim dalam reliabilitas, asuransi, hidrologi, klimatologi, dan ilmu lingkungan. Dalam kaitannya dengan manajemen resiko, EVT dapat meramalkan terjadinya kejadian ekstrim pada data berekor gemuk yang tidak dapat dilakukan dalam pendekatan tradisional lainnya. Studi mengenai penggunaan EVT dalam manajemen resiko dapat kita temukan dalam Embrechts, Kluppberg dan Mikosch (1997) serta Gencay (2001).

Dalam EVT, konstruksi pergerakan nilai ekstrim dilakukan melalui dua pendekatan, yang pertama dengan pemodelan langsung terhadap distribusi minima atau maxima dan yang kedua dengan pemodelan terhadap data yang melampaui patokan tertentu (*threshold*).

Jumlah kelebihan diatas patokan (*threshold*)

Andaikan kita modelkan suatu proses keuntungan tertentu yaitu X_t dengan $F(t) = \Pr(X_t \le t)$ suatu fungsi distribusi tertentu terhadap X_t dan u adalah suatu patokan (threshold) maka kelebihan akan terjadi apabila $X_t > u$ untuk t=1,2,...n. Sedangkan jika $y = X_i - u$ adalah suatu nilai kelebihan, maka distribusi peluang dari kelebihan nilai X dengan syarat $X > u$ adalah

$$F_u(y) = \frac{\Pr\{(X-u) \le y \mid X > u\}}{\Pr(X > u)} = \frac{F(y+u) - F(u)}{1 - F(u)} \qquad (1)$$

Untuk $x = y + u,\ X > u$

$$F(x) = [1 - F(u)]F_u(y) + F(u) \qquad (2)$$

3. GENERALIZED PARETO DISTRIBUTION DAN VALUE-AT-RISK

Balkema dan de Haan (1990) menyatakan bahwa untuk nilai u yang besar, maka fungsi distribusi dari $F_u(y)$ akan mendekati *generalized pareto distribution* (GPD). Secara umum, GPD dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$G_{x,s,u}9x) = \begin{cases} 1-(1+x\dfrac{x-u}{s})^{-1/x} & \text{jika } x \ne 0 \\ 1-e^{-(x-u)/s} & \text{jika } x = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

$$\text{dengan } x \in \begin{cases} \{u, \infty], & \text{jika } x \ge 0 \\ [u, u\text{-}s/x], & \text{jika } x < 0 \end{cases} \qquad (4)$$

dengan $x = 1/a$ merupakan parameter bayangan, a tail index s parameter skala dan u parameter lokasi sehingga jika $F_u(y)$ dengan nilai u besar mendekati GPD dan x = y+u, maka

$$\begin{aligned} F(x) &= [1 - F(u)]F_u(y) + F(u) \\ &= [1\text{-}F(u)]G_{x,s,u}(x-u) + F(u) \end{aligned} \qquad (5)$$

Untuk nilai u yang besar, *F(u)* dapat kita hitung dengan *(N-N$_u$)/N* dimana N_u adalah jumlah observasi yang lebih besar dari u dan N merupakan jumlah obsevasi sampel. Dengan demikian, $F(x)$ dapat kita estimasi dengan

$$\begin{aligned} \hat{F}(x) &= (1 - \frac{n-n_u}{n})G_{\hat{x},\hat{s},\hat{u}}(x-u) + \frac{n-n_u}{n} \\ &= 1\text{-}\frac{n_u}{n}(1+x\frac{x-u}{s})^{-1/x} \end{aligned} \qquad (6)$$

Value at risk–GPD

Sebelum melakukan estimasi terhadap nilai parameter bayangan x dan parameter skala s terlebih dahulu. Estimasi parameter dilakukan dengan metode *maximum likelihood estimaton* (MLE),

$f(x) = \frac{1}{s}(1 + x\frac{x}{s})^{-1/x-1}$ sehingga fungsi *log-likelihood* yang bersesuaian adalah:

$$\begin{aligned} l(x,s) &= \log(f(x_1, x_2, \ldots x_n; x, s) \\ &= -n\log(s) - (\frac{1}{x}+1)\sum_{i=1}^{n}\log(1+x\frac{x_i}{s}) \end{aligned} \quad (7)$$

Fungsi *likelihood* di atas memiliki domain $X_i \in D(x,s)$, $D(x,s) = [0,\infty)$ untuk $x \geq 0$. Persamaan *likelihood* dapat kita selesaikan secara numerik MLE $\hat{x}_n, \hat{s}_n$. metode ini berlaku untuk $x > -1/2$ dimana untuk nilai tersebut, dapat kita buktikan bahwa

$$n^{1/2}(\hat{x}_n - x, \frac{\hat{s}_n}{s} - 1) \xrightarrow{d} N(0, M^{-1}),\ n \to \infty,$$

dimana

$$M^{-1} = (1+x)\begin{pmatrix} 1+x & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$N(m,\Sigma)$ merupakan distribusi normal dengan mean m dan covariance matrix Σ. MLE bersifat konsisten dan asymptotic ally normal.

Karena $F_u(y) \approx G_{x,s}(y)$ menurut Balkema dan de Haan, maka lebih realistis jika kita mengasumsikan bahwa GPD untuk excesses $Y_1,\ldots.Y_N$ dimana $N = N_u$ independent terhadap Yi. Persamaan likelihood bersyarat dapat diselesaikan dengan reparameterisasi $(x,s) \to (x,t)$ dimana $t = -x/s$. Hasilnya

$$\hat{x} = \hat{x}(t) = N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\log(1 - tY_i) \text{ dimana}$$

$$h(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{N}(\frac{1}{\hat{x}(t)} + 1)\sum_{i=1}^{N}\frac{Y_i}{1 - tY_i} = 0$$

Pengujian adanya efek GPD

Gencay (2001) merumuskan pengujian adanya efek GPD pada data dapat dilakukan dengan melihat grafik QQ-plot dan mean Excess function (MEF). QQ plot dikonstruksi dari *scatter* antara data (yang telah diurutkan dari yang terkecil hingga yang terbesar) dengan quantile distribusi GPD atau eksponensial. Plot yang memiliki bentuk berupa kurva cekung/konkav merupakan indikasi adanya ekor gemuk, sementara QQ-plot yang berupa kurve cembung(convex) merupakan indikasi data ekor korus (*short-tailed*).

Cara kedua untuk menguji efek GPD adalah dengan menggambar Mean Excess Function (MEF) yang dirumuskan sebagai berikut:

$$e_n(u) = \frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i - u)}{\sum_{i=1}^{N} I\{X_i > u\}} \quad (8)$$

untuk $X \approx GPD(x < 1, s)$ dan $u < X_F$ maka,

$$\begin{aligned} e(u) &= E(x - u \mid x > u) \\ &= \frac{s + xu}{1 - x}, \qquad s + x\mathrm{u} > \mathrm{u} \end{aligned}$$

MEF diplot dengan nilai patokan u sebagai sumbu horizontal. Apabila MEF secara empiris memiliki kemiringan positif maka terdapat indikasi bahwa data mengikuti distribusi GPD dengan parameter bayangan$x$ positif.

Value at risk

Value at-risk merupakan *x* % kuantil dari distribusi keuntungan. Secara matematis dapat kita tuliskan :

$$\Pr(rt \leq VaR_t(a)) = a \quad (9)$$

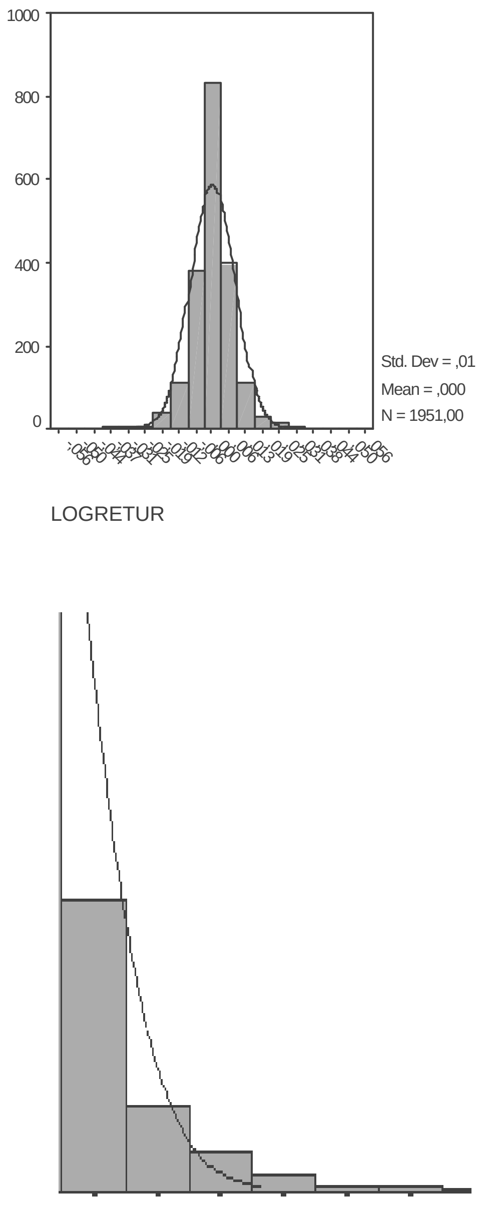
dimana r_t = $\log(p_t/p_t\text{-}1)$ adalah return pada saat t dengan pt merupakan nilai asset pada saat t. Rt mengikuti distribusi GPD. Kita dapat mengetahui nilai VaR dengan mencari invers distribusi

$$F(vaR_t(a)) = u + \frac{s}{x}\left((\frac{n}{n_u}a)^{-x} - 1 \right)$$

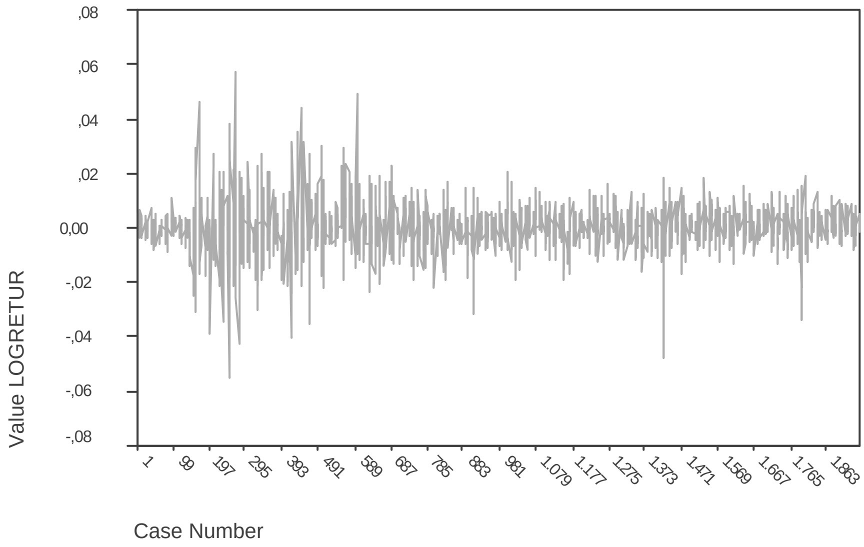
sehingga VaR untuk sumbu harian t adalah $VaR_t(a) = VaR_1(a).T^x$. Akan tetapi, untuk t yang cukup besar sebaiknya digunakan $VaR_t(a) = VaR_1(a).\sqrt{T}$ (Jorion, 2001).

STUDI KASUS

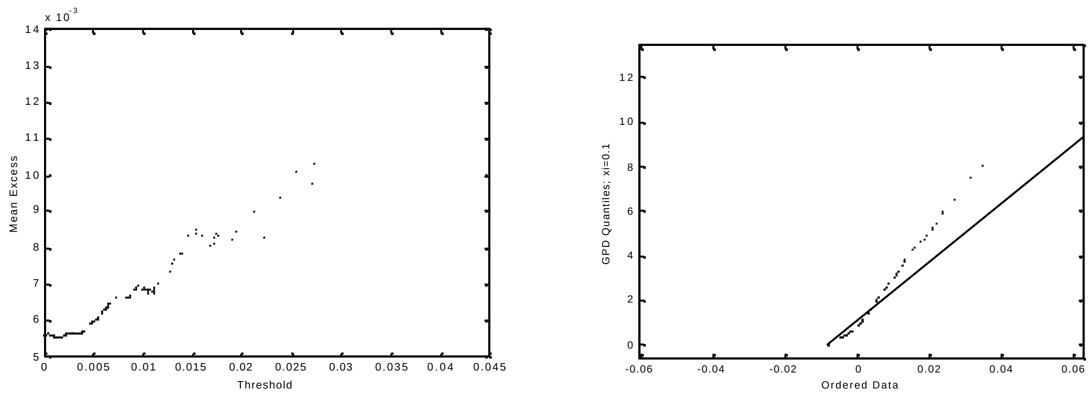
Data diambil dari Indeks Harga Saham Gabungan (IHSG) antara tahun 1997-2004.



Gambar 1. Histogram return harian IHSG 1997-2004. skewness statistik: 0,999 dan kurtosis 6,561. Terlihat dari histogram bahwa terdapat ekor gemuk (heavy tailed).



Gambar 2. Plot return harian IHSG. Terdapat volatility yang cukup tinggi.



Gambar 3. Plot Mean Excess Function (kiri) dan QQ-plot(kanan). ME plot berbentuk linear dengan slope positif, indikasi data mengikuti GPD dengan parameter bayangan positif. QQ-plot memiliki kecekungan (konkav) mengindikasikan adanya *heavy-tailed*.

Return harian yang telah di transformasi logaritmik dapat disajikan dalam gambar 2.

Perhitungan VaR

Patokan u merupakan quantile ke-c dari return harian IHSG. Patokan pada selang kepercayaan 95% adalah 0,0127 sedangakan patokan pada selang kepercayaan 99% adalah 0,024. Parameter x_i dan b untuk selang kepercayaan 95% adalah 0,1725 dan 0,006 sedangkan parameter x_i dan b pada selang kepercayaan 99% adalah 0,0525 dan 0,0086. Dengan demikian hasil perhitungan VaR-GPD dapat disajikan dalam Tabel 1.

Tabel 1. Perhitungan VaR-GPD

Waktu	Tingkat kepercayaan			
	95%	99%	99,5%	99,99 %
VaR harian	0,0122	0,0243	0,0300	0,0448
VaR 10 harian	0,0387	0,0769	0,0950	0,1416

4. KESIMPULAN

Nilai VaR-GPD sebesar 0,0122 artinya bahwa dengan tingkat kepercayaan 95%, maka kemungkinan kerugian terburuk pada 1 hari ke depan adalah 1,22% rupiah dari aset saat ini. Misalkan aset saat ini yang kita miliki sebesar Rp. 1 milyar, maka kemungkinan kerugian maksimal 1 hari ke depan pada tingkat keyakinan 95% sebesar Rp. 12.240.000,-

DAFTAR PUSTAKA

Balkema, A.A. dan de Haan, L., 1990, *A convergence rate in extreme-value theory*. J. Appl. Probab. 27, 577-585

Embrechts, P., C. Kluppelberg dan T. Mikosch, 1997, *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*, Springer

Gencay, R., F. Selcuk, dan A. Ulugulyagci, 2001, *High Volatility, Thick Tails and Extreme value Theory in value-at-Risk Estiamtion, Working Paper*

Jorion,P., 2001,*Value-at-Risk*, 2nd edition Mcgraw-Hill